

共 10 題計算證明題(未依題目順序)

1. 【類題】設 a, b, c 為 $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ 的三根，求 $\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$.
2. 證明算幾不等式 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.
3. 空間中四面體 $ABCD$ ， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 5$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{BD} = 4$
(1)設四面體內一點 P 到四面的距離分別為 a, b, c, d ，求 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 的最小值。
(2)設四面體內一點 P ，求 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ 的最小值.
4. 給十組 (X, Y) 數據
(1)求相關係數
(2)利用最小平方方法求 Y 對 X 的回歸直線.
5. 三杯裝有 1 公升的水甲、乙、丙，將甲的一半倒入乙，再將乙的一半倒入丙，再將丙的一半倒入甲為一次操作，
(1)兩次操作後，甲的水量為？
(2)穩定狀態下，甲的水量為？
6. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中認取相異四數排成四位數，
(1)若四位數為 99 的倍數有幾種組合？
(2)若四位數為 99 的倍數時可得相同數目的獎金，求期望值.
7. 設 $\log \sqrt{x}$ 的首數比 $\log \frac{x}{100}$ 多 2，求 x 的範圍.
8. 已知 $\theta = \frac{2\pi}{27}$ ，則 $1 + 2 \cos \theta + 3 \cos 2\theta + 4 \cos 3\theta + \cdots + 27 \cos 26\theta =$ _____.
9. 請用兩種方法解出 $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ 的最大值.