

國立板橋高級中學 101 學年度教師甄試 數學科試題

1. 四面體 $O-ABC$ 中, $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ 兩兩垂直, P 為內部一點。

(1) 若 P 到 OBC, OAC, OAB 的三距離分別為 4, 5, 6, 求 \overline{OP} 。

(2) 若 P 到 $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ 的三距離分別為 4, 5, 6, 求 \overline{OP} 。

(3) \overrightarrow{OP} 和 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 分別夾 45° 和 60° 角。求 \overrightarrow{OP} 和 \overrightarrow{OC} 的夾角。

2. 市佔率轉移矩陣 $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$, $P^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 。(1) 求 $P^{(2)}$ (2) 求 $P^{(n)}$ (3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$ 。

3. 曲線 $\Gamma: y = \frac{1}{x}$,

(1) $\triangle ABC$ 三頂點皆在曲線 Γ 上, 求證其垂心亦在曲線 Γ 上。

(2) $D = (-1, -1)$, $\triangle BCD$ 為正三角形, 且 B, C 在第一象限曲線 Γ 上。求 B, C 坐標。

4. (1) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 9} + \sqrt{-x^2 + 68x - 256}$, 求 $f(x)$ 的最大值。

(2) 承上, 此時 x 之值。

5. $\langle x_n \rangle$ 正實數數列, $x_1 = \frac{3}{4}$ 且滿足 $x_{k+1}^2 = x_k^4 + 2x_k^3 + x_k^2$, 求 $\left[\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_{202}+1} \right]$ 。

6. 40 個人匿名投票, 三位候選人, 每人一張票, 至多可投二人, 已知無廢票。

(1) 若每人都投兩人, 有幾種不同的開票結果。

(2) 若每人可能投兩人也可能投一人, 有幾種不同的開票結果。

(3) 承 (1), 且至少有一位候選人票數不多於 10 票。

7. (1) 求 $\begin{vmatrix} 10 & 9 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 9 & \dots & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & 1 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 9 & \vdots \\ 8 & \dots & \dots & \dots & 1 & 10 & 9 \\ 9 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 10 \end{vmatrix}$ (2) $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 求 $\begin{vmatrix} x^9 & x^8 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & x^9 & x^8 & \dots & \dots & \dots & x \\ x & 1 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & x^8 & \vdots \\ x^7 & \dots & \dots & \dots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^8 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & x^9 \end{vmatrix}$ 。

8. $f(x) = C_{n-1}^n x^{n-2} + C_{n-2}^n x^{n-3} + \dots C_2^n x + C_1^n$, $f(x) = 0$ 有重根, 且 $66 \leq n \leq 2012$, 求滿足以上條件 n 之總和。
(66 是不確定的數字?)
9. 證明或舉出反例: $f(x)$ 為多項式, 且 $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, 則 $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 4$ 。
10. 求所有的正實數 x, y , 滿足 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}, \frac{2xy}{x+y}$ 皆為正整數且四數之和為 66。

感謝 lianger 幫忙修正題意和題號, 寸絲@2012.05.19