臺北市立中正高級中學 101 學年度第 1 次專任教師甄選

數學科初選試卷

一、填充題：

1. 設 Γ_1 ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$、$\Gamma_2$ ：$\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$，其中 $a>b>0$，求 Γ_1 與 Γ_2 交集的區域面積為________。

2. 某人在地面 A 點，測得山峰的仰角為 θ，此人向山腳前進 100 公尺到達 B，測得山峰仰角為 2θ，再向山腳前進 40 公尺到達 C，又測得山峰仰角為 3θ，則山高為____________公尺。

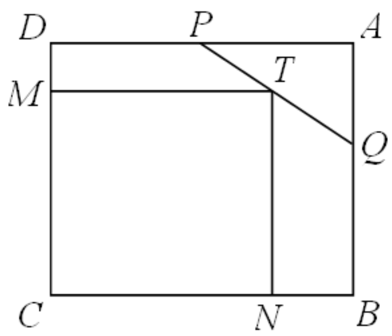
3. 連續擲 n 回硬幣，正面不連續出現的機率為 P_n，若 $P_n=\alpha P_{n-1}+\beta P_{n-2}$ $(n\ge 3)$ ，則 P_{10}=________。(化為最簡分數)

4. 已知關於 x 的實係數方程式 $x^2-2x+2=0$ 和 $x^2+2mx+1=0$ 的四個不同的根在複數平面上所對應的四點共圓，則實數 m 的取值範圍為__________。

5. 設甲袋內有 2 個白球，乙袋內有 3 個紅球，每次自各袋中隨機取一球交換，當足夠多次的交換後，甲袋內有 2 個紅球的機率為__________。(化為最簡分數)

6. 方程式 $ax^2-4ax+1=0$ 的兩個正數解 α,β 滿足不等式 $|\log\alpha-\log\beta|\le 1$，則實數 a 的範圍為__________。

7. 如圖所示：矩形 $ABCD$，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AP}=3$，$\overline{AQ}=2$，令 T 在 $\overline{PQ}$ 上移動，試求矩形 $TNCM$ 的最大面積為__________。



8. 若 $\begin{cases} x=\dfrac{12z^2}{1+36z^2} \\ y=\dfrac{12x^2}{1+36x^2} \\ z=\dfrac{12y^2}{1+36y^2} \end{cases}$ ，則 $x+y+z=$__________。

二、計算題：試題於答案卷，須有過程，否則不予計分。答案卷共四張。

臺北市立中正高級中學101學年度第1次專任教師甄選

數學科初選答案卷

一、填充題：每題5分

1. $\frac{2\pi}{3}ab-\frac{\sqrt{3}}{2}ab$	2. $25\sqrt{7}$	3. $\frac{9}{64}$	4. $-1<m<1$或$m=-\frac{3}{2}$
5. $\frac{3}{10}$	6. $\frac{1}{4}\le a\le\frac{121}{160}$	7. $\frac{147}{8}$	8. 0 或 $\frac{1}{2}$

二、計算題：每題10分

1. $A(3,1,2)$為空間中一點，P、Q為xy平面上以原點為圓心且半徑為2的圓之直徑兩端點，試計算下列問題：

   (1) 內積$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=$？

   (2) $\cos\angle PAQ$的最大值與最小值？

   (3) $\cos\angle PAQ$為最小值時，ΔPAQ的面積為何？

2. 設 $N=\underbrace{11\cdots1}_{n-1\text{個}}\underbrace{22\cdots2}_{n\text{個}}5$，若 $N=k^2$，試猜測正數 k 之值？並證明之。

3. ΔABC 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，P 為 ΔABC 內部一點，自 P 分別向 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 作垂線，垂足依次為 L，M，N，則：

(1) $2\overline{PL}+3\overline{PM}+4\overline{PN}=$？

(2) $(2\overline{PL})^2+(3\overline{PM})^2+(4\overline{PN})^2$ 的最小值為何？

(3) 當 $(2\overline{PL})^2+(3\overline{PM})^2+(4\overline{PN})^2$ 有最小值時，若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則數對$(\alpha，\beta)=$？

4. 已知函數 $f(x)=ax^2-c\,(a,c\in\mathbb{R})$ 滿足 $-4\le f(1)\le -1$，$-1\le f(2)\le 5$，

(1) 利用 *Lagrange* 多項式，將 $f(x)$ 表為 $P_1(x)f(1)+P_2(x)f(2)$，
其中 $P_1(x)$ 與 $P_2(x)$ 均為二次多項式，則 $P_1(x)=$？ $P_2(x)=$？

(2) 求 $f(3)$ 之值的範圍？

5. 已知三正數 a，b，c 滿足 $a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}=25$，$\dfrac{b^2}{3}+c^2=9$，$a^2+ac+c^2=16$，

(1) 設 $\dfrac{c}{a}=t$，則 $\dfrac{b}{a}$ 可表為 pt^2+qt，其中 p，q 為兩有理數，求數對(p，q)=？

(2) 求(1)中 t 之值？

(3) 求 a 之值？

6. 設 x_1，x_2，⋯，x_n 都是正數且 n≥2，試分別利用算幾不等式與數學歸納法兩種方式證明：

$$\frac{{x_1}^2}{x_2}+\frac{{x_2}^2}{x_3}+\frac{{x_3}^2}{x_4}+\cdots\cdots+\frac{{x_{n-1}}^2}{x_n}+\frac{{x_n}^2}{x_1}\geq x_1+x_2+\cdots+x_n$$