

國立嘉義高級中學 100 學年度教師甄選—數學科試題

一、填充題&多選題：每題 5 分，共 80 分 ※請在答案卷上作答※

1. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{7}$ ， $a_2 = \frac{3}{7}$ 及 $a_{n+1} = \frac{7}{2}a_n \cdot (1 - a_n)$, $n \geq 1$ ，則 $a_{2011} - a_{100} = ?$

2. 設 x 為實數， $t = \log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 $(M, m) = ?$

3. 求 $\sum_{k=1}^{180} \sin^2 k^\circ = ?$

4. 設平面 $E_1: x + 3y - 5z = 1$, $E_2: 2x - y + 4z = -1$ ，若 E_1 上有邊長為 2 的正三角形，則投影到 E_2 所成圖形的面積為？

5. 設 Γ 表平面上 $\left| \frac{3x + y - 19}{\sqrt{10}} \right| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$ 的圖形，求 Γ 的對稱軸為？

6. 若橢圓： $\frac{x^2}{k^2 + 1} + \frac{y^2}{7 - k} = 1$ 與雙曲線： $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{30} = 1$ 共焦點，則 $k = ?$

7. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，若 $AX = B$ ，求矩陣 $X = ?$

8. 已知 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + b = 2$ ，若 $t = 5^a + 5^b$ ，求 t 的範圍為？

9. 已知 $f(x) = a + \log_b x$ 的圖形通過點 $(1, 2)$ ，而其與直線 $y = x$ 成對稱的圖形通過 $(4, 9)$ ，求 $a + b = ?$

10. 設 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ 與 $g(x) = ax^2$ 的圖形，交於 A, B 兩點，已知 $\overline{AB} = 6$ ，則 $a = ?$

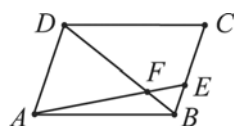
11. 設 $\triangle ABC$ 的三高為 6, 4, 3，則此 \triangle 的外接圓半徑為？

12. 若 6 個相同物任意分給甲、乙、丙三人，則共有幾種不同分法？

13. 若 6 個相同物任意分給甲、乙、丙三人，則 甲分到 4 個，乙 1 個，丙 1 個 的機率為？

14. 設 $ABCD$ 為一平行四邊形， $\overline{BE} : \overline{CE} = 1 : 2$ ，如右圖所示，

設 $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，求 $(x, y) = ?$



15. 設相異三平面 $E_1: a_1x + b_1y + c_1z = 0$ ， $E_2: a_2x + b_2y + c_2z = 0$ ， $E_3: a_3x + b_3y + c_3z = 0$ 交於一直線 L 。若點

$P(1, 2, 3)$ 在直線 L 上，則下列哪些點也在直線 L 上？ (A) $(1, 1, 1)$ (B) $(2, 3, 4)$ (C) $(-1, -2, -3)$ (D) $(5, 6, 7)$ (E) $(3, 6, 9)$ 。

16. 設二次函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$, $f'(0) = -2$ ，求 $f(x) = ?$

二、計算證明題：共 20 分

1. 設 R 表平面上 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$ 圖形圍成的區域且目標函數 $f(x, y) = x + y$ 在區域 R 上的最大值為 M ，最小值

為 m ，則數對 $(M, m) = ?$ (8 分)

2. 已知方程式 $2x^3 - 3(k+1)x^2 + 6kx - 2k = 0$ 有三相異實根，求實數 k 的範圍？ (6 分)

3. 設有兩個變數的 n 筆標準化數據 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，即其算術平均數 $\overline{X} = \overline{Y} = 0$ ，標準差 $\sigma_x = \sigma_y = 1$ 且

令其相關係數為 r ，試以最小平方方法證明： Y 對 X 的迴歸直線為 $y = rx$ 。(6 分)