

102 學年度中區縣市政府教師甄選策略聯盟

國中數學科試題

選擇題 (每題 2 分，共 100 分)

- 下列敘述對費馬最後定理，何者為非？
①費馬宣稱自己完成證明。
②後人在費馬手稿中找到他的證明。
③上個世紀 Andrew Wiles 給出證明。
④這是一個關於數論的定理。
- 設函數 $f(x) = \frac{10^x + 5}{10^x - 5}$ 的反函數 $f^{-1}(x)$ ，則 $f^{-1}(3)$ 的值為？
①0 ②1 ③2 ④3
- 指數方程式 $3^{4x-1} = 2^{4x} + 16^{x-\frac{3}{4}}$ ，解 $x = \frac{b}{a}$ ，若 $\frac{b}{a}$ 為一最簡分數且 $a > 0$ ，則 $a+b = ?$
①12 ②3 ③5 ④7
- 試求多項式 $p(x) = x^4 + 4x^3 - 8x + 3$ 所有整數根之和？
①-2 ②-1 ③1 ④2
- 在幾何學上對於一個擁有 F 個面，V 個頂角和 E 條稜邊的單聯通多面體，我們可以導出公式 $F - E + V = 2$ 。此公式以哪位數學家為名？
①高斯 ②歐拉 ③牛頓 ④黎曼
- 假設 A 是一 3×3 方陣，使得 $A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，則方陣 A 對角線元素之和為？
① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{11}{5}$ ④ $\frac{11}{6}$
- 設 z 為一複數， $|z - 2i| + |z + 4i| \leq 10$ 之解集合在複數平面上的圖形面積為？
① 12π ② 13π ③ 14π ④ 15π
- 如果現在有一個遊戲為擲一個公正銅板，如果擲出正面，你便會得到報酬 1 元，這樣遊戲便結束了。如果是反面就必須繼續擲，一直到第一次正面出現為止，這時你將得到報酬 1 元，但期間如果為連續反面你沒有能得到任何報酬且遊戲必須繼續進行。請問這個遊戲的期望值為？
①1 ②2 ③ $\sqrt{2}$ ④ ∞
- 設 $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 98^2 + 99^2 + 100^2$ ，則 S 的十位數字為？
①3 ②4 ③5 ④6
- 設 A, B 為平面上 $3x + 4y + 5z = 4$ 上相異的兩點，且 $\overline{AB} = (a, b, c)$ 。則 $3a + 4b + 5c + 1 = ?$
①1 ②3 ③5 ④不定值
- 四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B = \angle C = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = 4, \overline{CD} = 5$ ，則四邊形的面積為？
① $\frac{43\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{45\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{47\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{49\sqrt{3}}{4}$
- 關於圓周率 π 是無理數，下面哪個敘述較為正確？
①以 10 進位制，圓周率 π 可以表達成為一個分數，2 進位制則否。
②以 2 進位制，圓周率 π 可以表達成為一個分數，10 進位制則否。
③不管以 10 進位制或 2 進位制，圓周率 π 都可以表達成為一個分數。
④不管以 10 進位制或 2 進位制，圓周率 π 都不可以表達成為一個分數。

13. 設 a 為常數。若線性方程組
$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ 5x-y+az=0 \end{cases}$$
 無解，則 $a=?$
- ① 0 ② $\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{2}{5}$ ④ 不存在這樣的常數 a
14. 若向量 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ，則向量 \vec{a} 、 \vec{b} 之夾角為？
- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$
15. 11^{13} 除以 9 的餘數為？
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4
16. 複數平面中單位圓上的相異兩點 z_1 、 z_2 滿足方程式 $(z+\frac{1}{z})^{10}=3^5$ ，則 $z_1+z_2=?$
- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$
17. 4 個相同的球任意放入 5 個編號 1 號到 5 號的箱子中，則 1 到 4 號箱中每箱恰有一個機率為？
- ① $\frac{23}{625}$ ② $\frac{24}{625}$ ③ $\frac{25}{625}$ ④ $\frac{26}{625}$
18. 若 θ 為銳角，且 $3\cos^2\theta=8\sin\theta$ ，則 $\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}=?$
- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{4}{3}$
19. 試問有幾個直角三角形滿足以下條件：三邊的長皆為整數且有兩邊的長度剛好差 1？
- ① 5 ② 7 ③ 11 ④ 無窮多個
20. 在正 20 邊形中，連接其所有對角線，則此圖形中，以對角線為三邊所圍成的三角形共有多少個？
- ① 680 ② 720 ③ 760 ④ 800
21. 求兩直線 $3x+4y=0$ 與 $6x+8y=3$ 的距離。
- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 3
22. 2^{117} 除以 117 所得的餘數為何？
- ① 1 ② 2 ③ 36 ④ 44
23. 360 的正因數個數有多少個？
- ① 6 ② 12 ③ 24 ④ 48
24. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ，試問 $2^{64}-1$ 是幾位數？
- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21
25. 令 $f(x)=\sin x$ ，則以下何者正確？
- ① $f(1)>f(2)>f(3)>f(4)$
 ② $f(4)>f(3)>f(2)>f(1)$
 ③ $f(2)>f(1)>f(3)>f(4)$
 ④ $f(1)>f(2)>f(4)>f(3)$ (以上角度單位為弧度)
26. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}) = ?$
- ① 0 ② 1 ③ e ④ 此極限不存在
27. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = ?$
- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ 此極限不存在

28. 試求曲線 $x=4y-y^2$ 和 $x-2y+3=0$ 所圍成的封閉區域之面積。

- ①10 ② $\frac{31}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④無法圍成封閉曲線。

29. 試求 $\int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx$ 的值。

- ①0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④1

30. 令 γ 表示圓心為 $(0,0)$ 、半徑為 $\frac{1}{4}$ 的圓，則 $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+z+1} = ?$

- ①0 ② πi ③ π ④-1

31. 設 A, B, C 為 n 階方陣， O 及 I 分別代表 $n \times n$ 階的零矩陣及單位矩陣，以下敘述何者正確？

- ①若 $AC=BC$ ，則 $A=B$ 。
②若 $AB=O$ ，則 $A=O$ 或 $B=O$ 。
③若 $A^2=I$ ，則 $A=\pm I$ 。
④若 A^T 為 A 的轉置(transpose)矩陣，則 $A+A^T$ 為對稱(symmetric)矩陣。

32. A 為 4 階的方陣，其第一行至第四行的行向量分別為 $[2, -1, 3, 5]$ 、 $[0, 1, 0, 7]$ 、 $[0, 0, 8, 2]$ 、 $[0, 0, 0, 3]$ ，則矩陣 A 的所有特徵值(eigenvalue)的總和為

- ①9 ②14 ③19 ④30

33. 下列關於空間的敘述何者正確？

- ①通過已知平面外一點，恰有一平面與此平面垂直。
②通過已知直線上一點，恰有一平面與此直線垂直。
③通過已知直線外一點，恰有一平面與此直線平行。
④空間中兩相異直線若不相交，則一定平行。

34. 令 G 為一有限群(finite group)， $|G|$ 表示集合 G 的元素個數，以下的敘述何者正確？

- ①若 $|G|=4$ ，則 G 必為循環群。
②若 $|G|=6$ ，則 G 必為交換群。
③若 $|G|=12$ ，則 G 必含有一子群 H 且 $|H|=6$ 。
④若 H 為 G 的子群，則 $|H|$ 必整除 $|G|$ 。

35. 已知 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3-x+1 的餘式為 $3x^2-6$ ，若 $f(x)$ 除以 x^3-x+1 的餘式為 ax^2+b ，求 $2a+b = ?$

- ①3 ②5 ③7 ④9

36. 設 a, b 均為實數，求 $a^2+9b^2+(a+3b-9)^2$ 之最小值為

- ①18 ②21 ③25 ④27

37. 已知隨機變數 X 與 Y 的相關係數為 -0.6 ，求 $-3X-2$ 與 $2Y+1$ 的相關係數為

- ① -0.6 ② -0.1 ③ 0.1 ④ 0.6

38. 設 $f(x+8)=f(x)$ ，且當 $-12 \leq x \leq -5$ 時， $f(x)=2-3x$ ，求 $f(765)$ 之值為

- ① -2293 ② -13 ③17 ④35

39. 已知甲手上有硬幣 10 元 1 枚、5 元 2 枚、1 元 2 枚、5 角 4 枚，試問可組成多少種不同的款額？

- ①32 ②44 ③52 ④64

40. $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{12}$ 展式中 x^{20} 項的係數為

- ①495 ②512 ③530 ④545

41. A, B, C, D 四人由左至右排成一列，其中 A 排在 B 之左邊或 A 排在 C 之左邊的機率為

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{5}{8}$

42. 已知二直線 $2x + y - 2 = 0$ 、 $4x - y - 1 = 0$ 與拋物線 $y = ax^2 + b$ 均相切，求 $3a - 2b$ 之值為
 ① -3 ② -2 ③ 2 ④ 3
43. 甲在昨天以前已考了幾次數學，得到平均分數為 82 分。若今天考本學期最後一次考試而得分數為 98 分，因此本學期甲的數學考試分數平均為 84 分，試問甲本學期共考了幾次數學？
 ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9
44. 若 $0 < \sin \theta - \cos \theta < 1$ 且 $\cos \theta \sqrt{\sec^2 \theta - 1} > 0$ ，則 θ 在第幾象限？
 ① 第一象限 ② 第二象限 ③ 第三象限 ④ 第四象限
45. 設隨機變數 X 為常態分佈，且已知 $X \sim N(10, 2)$ ，求 $P(X \geq 10)$ 之值？
 ① 0.2 ② 0.4 ③ 0.5 ④ 0.8
46. 設 a 、 b 、 c 均為正整數，已知 $a + 2b + 3c = 20$ ，求滿足此種條件的數 (a, b, c) 共有多少種？
 ① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28
47. 求 $\frac{1}{5} + \frac{1+3}{5^2} + \dots + \frac{1+3+\dots+3^{n-1}}{5^n} + \dots$ 之值為
 ① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{5}{3}$
48. 令 $f(x) = n^x + \frac{1}{n^x}$ ，已知 $f(1) = 1$ ，求 $f(101) = ?$
 ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2
49. 在 xy 平面上，滿足 $y^2 \geq x^2$ 且 $|y| \leq 2$ 的圖形的面積為
 ① 6 ② 8 ③ 12 ④ 16
50. 設 $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ ， $g(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$ ，若 $f(g(x)) = x$ ，則 $a+b+c = ?$
 ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1