國立中科實驗高級中學 101 學年度教師甄選
數學科專業知能

一、　單選題：每題 3 分

> 說明：第 1 至 10 題，每題選出最適當的一個選項，依題號在答案卷上作答，不須寫出計算過程，每題答對得 3 分，答錯不倒扣。

1. 設坐標空間中三條直線 L_1，L_2，L_3 的方程式分別為 $L_1：\frac{x}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{8}$；$L_2：\frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{4}$；$L_3：\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$。試問下列哪些選項是不正確的？

(A) L_1 與 L_2 相交　(B) L_2 與 L_3 平行　(C) 三直線 L_1，L_2，L_3 共平面

(D)直線 $L：\begin{cases} x=0 \\ \frac{y+3}{4}=\frac{z+4}{-3} \end{cases}$ 與直線 L_1，L_2 皆垂直

(E)點 $P(0, -3, -4)$ 與 $Q(0,0,0)$ 的距離即為點 P 到 L_3 的最短距離。

答：E

1. $L_1=\frac{x}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{8} \Rightarrow \begin{cases} d_1=(1,6,8) \\ 點(0,-3,-4) \end{cases}$

$L_2：\frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{4} \Rightarrow \begin{cases} d_2=(1,3,4) \\ 點(0,-3,-4) \end{cases}$

$L_3：\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} \Rightarrow \begin{cases} d_3=(1,3,4) \\ 點(0,0,0) \end{cases}$

(A) ∵ $\begin{cases} L_1 \& L_2 共點 \\ d_1 \nparallel d_2 \end{cases}$ ∴ $L_1 \& L_2$ 相交

(B) $\begin{cases} d_1 // d_2 \\ 設 L_2 和 L_3 相交：\begin{cases} x=t &= s \\ y=-3+3t &= 3s \\ z=-4+4t &= 4s \end{cases} \end{cases}$ 不合⇒不相交 →t

∴ $L_2 // L_3$

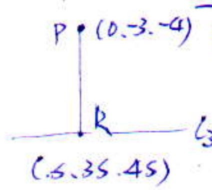
(C) ∵ $\begin{cases} L_2 // L_3 \to 共面 \\ L_1 和 L_2 相交 \to 共面 \end{cases} \to L_1、L_2、L_3$ 共面

(D)

$\overline{PQ}=5$

$d(P, L_3) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PR}=(s, 3s+3, 4s+4) \\ d_3=(1, 3, 4) \end{cases}$

$\overrightarrow{PR}\cdot d_3 = s+9s+9+16s+16=0$



∴ $s=\frac{-25}{26}$

∴ $R\left(\frac{-25}{26}, \frac{-75}{26}, \frac{-100}{26}\right) \neq Q$

∴ 非最短

2. 某廠商委託民調機構在甲、乙兩地調查聽過某項產品的居民佔當地居民之百分比（以下簡稱為「知名度」）。結果如下：在 95%信心水準之下，該產品在甲、乙兩地的知名度之信賴區間分別為 $[0.50, 0.58]$、$[0.08, 0.16]$。試問下列哪些選項是正確的?

(A)甲地本次的參訪者中，45%的人聽過該產品

(B)此次民調在乙地的參訪人數少於在甲地的參訪人數

(C)此次調查結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於 95%

(D)若在乙地以同樣方式進行多次民調（或多次抽樣），所得知名度有 95%的機會落在區間 $[0.08, 0.16]$

⇒每次 P 不同

(E)經密集廣告宣傳後，在乙地再次進行民調，並增加參訪人數達原人數的 4 倍，則在 95%信心水準之下該產品的知名度之信賴區間寬度會減半（即 0.04）

答：B

∵ P change. ∴ $\sqrt{\frac{P(1-P)}{4n}} = \frac{\sqrt{P(1-P)}}{2\sqrt{n}}$ (不一定)

3. 設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，試問下列哪選項是正確的?

(A) $a^3=3$　(B) $\log_{\sqrt{3}} a=\sqrt{3}$　(C) $\log_a 3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$　(D) $a<3^{\frac{1}{4}}$　(E) $a<1$

答：C

2.

甲	乙
$[0.50, 0.58]$	$[0.08, 0.16]$
$\mu=0.54$	$\mu=0.12$
$\sigma=0.02$	$\sigma=0.02$

$\sqrt{\frac{0.54\times0.36}{n_甲}}=0.02$　$\sqrt{\frac{0.12\times0.88}{n_乙}}=0.02$

$\frac{n_乙}{n_甲}=\frac{0.12\times0.88}{0.54\times0.36}=\frac{44}{81}<1$

∴ $n_甲 > n_乙$

3. $a^{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \Rightarrow \log_a \sqrt{3}=\sqrt{3} \Rightarrow \log_a 3=2\sqrt{3}$

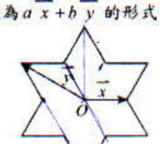
∴

(A) X

(B) X

(C) $\log_a 3\sqrt{3}=\frac{3}{2}\log_a 3=3\sqrt{3}$ #

4.將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後，可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點O為中心，其中$\vec{x}$，$\vec{y}$分別為原點O到兩個頂點的向量。若將原點O到正六角星12個頂點的向量，都寫成為$a\vec{x}+b\vec{y}$的形式，則$a+b$的最大值為何？



(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5　(E) 6。

答：D

5.心理學家有時候用數學模式：$L(t)=100\left(1-10^{-kt}\right)$來描述在時間$t$時的學習量$L(t)$，其中$k$為常數。假設有一個學生需要背熟100個英文單字，心理學家發現這個學生在10分鐘時背熟10個單字，根據上述資料，這個學生要花幾分鐘才能背熟90個以上的單字？(選出最接近的答案)

(A)180　(B)190　(C)200　(D)210　(E)220

答：E

6.將自然數1、2、3、4、5....依序剔去2的倍數、3的倍數、5的倍數，其餘次序不變，得一數列$\langle a_n\rangle=\langle 1,7,11,13,17,19,....\rangle$，則$a_{100}=$?

(A) 313　(B) 343　(C) 373　(D) 403　(E) 433。

答：C

7.一束光線由點A(1,2,5)射出，通過球面$S:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$，在xy平面產生的陰影區域面積為何？

(A) 25π　(B) 16π　(C) $\frac{16}{3}\pi$　(D) $\frac{25}{3}\pi$　(E) $\frac{5}{3}\pi$

答：E

8.在平面坐標中，設直線$y=3x-1$的圖形與拋物線$y=x^2-3x+k$交於A、B兩點，且$\overline{AB}=4\sqrt{5}$，則k＝？

(A) 1　(B)3　(C) $\frac{24}{5}$　(D) 6　(E) $\frac{15}{2}$

答：D

9.設$a,b,c\in\{1,2,3,...9\}$，若$\frac{699}{900}<0.a\overline{bc}<\frac{700}{900}$，則$a+b+c=$?

(A) 5　(B) 13　(C) 17　(D) 20　(E) 23。

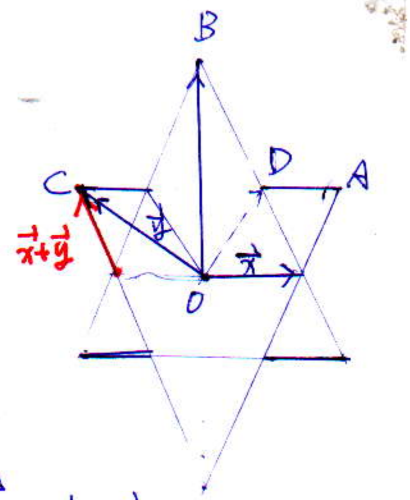
答：D

10.求值：$\cos^2 10°+\cos^2 50°-\sin 40°\sin 80°=$?

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$　(D) $\frac{3}{4}$　(E) $\frac{5}{6}$，

答：D

4.



$\overrightarrow{OB}=3\vec{x}+2\vec{y}$

$\overrightarrow{OD}=2\vec{x}+\vec{y}$　∴ $a+b$最大值 $3+2=5$

$\overrightarrow{OA}=3\vec{x}+\vec{y}$

5.

$10^{-10k}=0.9$

$L(t)=100(1-10^{-kt})$

∵ $L(10)=100(1-10^{-10k})=10 \Rightarrow 1-10^{-10k}=0.1$

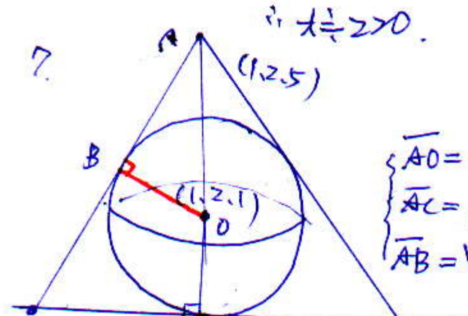
$L(t)=100(1-10^{-kt})\geq 90$

$1-0.9^{\frac{t}{10}}\geq 0.9 \Rightarrow 0.1\geq 0.9^{\frac{t}{10}}$

取對數 $-1\geq \frac{t}{10}(2\log 3-1)\Rightarrow t\geq 219....$

∴ $t\fallingdotseq 220$.

7.



$\overline{AO}=4$

$\overline{AC}=5$

$\overline{AB}=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$

$\triangle ABO \sim \triangle ACP$

$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \Rightarrow \overline{CP}=5\times\frac{1}{\sqrt{15}}$

∴ 面積 $=5\times5\times\frac{1}{15}\times\pi=\frac{5}{3}\pi$

6.

1 7, 11, 13, 17, 19　　101, 103, 107, 109

個數 ↓ 26　　23 29　　113 119

31 37　　121 127

41 43 47 49　　131 133 137 139

53 59　　143 149

61 67　　151 157

71 73 77 79　　161 163 167 169

83 89　　173 179

91 97　　181 187

191 193 197 199

2個數 26個

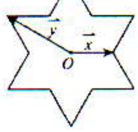
$1,7,11 \xrightarrow{26} 101 \xrightarrow{26} 191 \xrightarrow{26} 281 \xrightarrow{26} 371+1$

$a_{99}=371$

$a_{100}=373$

4.將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點O為中心，其中$\overrightarrow{x}$、$\overrightarrow{y}$分別為原點O到兩個頂點的向量。若將原點O到正六角星12個頂點的向量，都寫成為$a\overrightarrow{x}+b\overrightarrow{y}$的形式，則$a+b$的最大值為何?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6。



答：D

5.心理學家有時候用數學模式：$L(t)=100\left(1-10^{-kt}\right)$來描述在時間$t$時的學習量$L(t)$，其中$k$為常數。假設有一個學生需要背熟100個英文單字，心理學家發現這個學生在10分鐘時背熟10個單字，根據上述資料，這個學生要花幾分鐘才能背熟90個以上的單字？(選出最接近的答案)

(A)180 (B)190 (C)200 (D)210 (E)220

答：E

6.將自然數1、2、3、4、5....依序刪去2的倍數、3的倍數、5的倍數，其餘次序不變，得一數列$<a_n>=<1,7,11,13,17,19,....>$，則$a_{100}=$?

(A) 313 (B) 343 (C) 373 (D) 403 (E) 433。

答：C

7.一束光線由點A(1,2,5)射出，通過球面$S:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$，在xy平面產生的陰影區域面積為何？

(A) 25π (B) 16π (C) $\frac{16}{3}\pi$ (D) $\frac{25}{3}\pi$ (E) $\frac{5}{3}\pi$

答：E

8.在平面坐標中，設直線$y=3x-1$的圖形與拋物線$y=x^2-3x+k$交於A、B兩點，且$\overline{AB}=4\sqrt{5}$，則k＝ ?

(A) 1 (B)3 (C) $\frac{24}{5}$ (D) 6 (E) $\frac{15}{2}$

答：D

9.設$a,b,c\in\{1,2,3,...9\}$，若$\frac{699}{900}<0.a\overline{bc}<\frac{700}{900}$，則$a+b+c=$?

(A) 5 (B) 13 (C) 17 (D) 20 (E) 23。

答：D

10.求值：$\cos^2 10°+\cos^2 50°-\sin 40°\sin 80°=$?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{5}{6}$。

答：D

8.

$\begin{cases} y=3x-1 \\ y=x^2-3x+k \end{cases} \Rightarrow x^2-6x+(k+1)=0,\ \overline{AB}=4\sqrt{5}$

設 $\begin{cases} A(x_1,y_1) \\ B(x_2,y_2) \end{cases}$ $x_1+x_2=6 \Rightarrow |x_1-x_2|^2=|x_1+x_2|^2-4x_1x_2$

$\Rightarrow |y_1-y_2|=3|x_1-x_2|$

$\because |x_1-x_2|^2+9|x_1-x_2|^2=16\times5=80 \Rightarrow |x_1-x_2|^2=8$

$8=36-4(k+1) \Rightarrow k+1=7 \Rightarrow k=6$ #

9.

$0.a\overline{bc}=\frac{10^2a+10b+c-a}{990}$ $990=90\times11$

$\because 699\times11<10^3a+10^2b+10(c-a)<700\times11$

0 6 9 0

$7689<10^3a+10^2b+10(c-a)<7700$

a	c-a=c-7	b
7	-1	7
a=7	c=6	b=7

$\therefore a+b+c=20$

10.

$\cos^2 10°+\cos^2 50°-\sin40°\sin80°$

$=\cos^2 10°+\cos^2 50°-\cos50°\cos10°$

$=[\cos50°-\cos10°]^2+\cos50°\cos10°$

$=(-2\sin30°\sin20°)^2+\frac{\cos60°+\cos40°}{2}$

$=\sin^2 20°+\frac{1}{4}+\frac{1-2\sin^2 20°}{2}$

$=\frac{3}{4}$ #

二、 填充題：每題4分，共60分

說明：第1至15題，不須寫出計算過程，依題號在答案卷上作答，每題答對得4分。

1.設球面Γ的球心在原點，半徑為1，令Q的座標為(1,2,0)，N的座標為(0,0,1)，S的座標為(0,0,−1)，設$\overline{NQ}$線段交球面Γ於P點，求$\overline{PS}$線段與xy平面的交點坐標為______。

答：$(\frac{1}{5},\frac{2}{5},0)$

2.箱子裡有大小相同的號碼球120個，其中i號球有i個，i=1,2,3,....,15，從箱子裡一直取球(取後放回)，每取一球就計算該球之球號與某整數n的差的絕對值，使得這些差的期望值為最小，則n值=______。

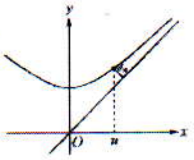
答：11

中位數

3.將「中科實中中部科科第一」十個字重新排成一列，若要求相同字不能相鄰，則排列數=______。

答：24240

4.考慮雙曲線$y^2-x^2=1$圖形的上半部（如右圖），取此雙曲線上x坐標為n的點，此點與漸近線$y=x$的距離記為d_n，其中n為正整數。則$\lim_{n\to\infty}(n\cdot d_n)=$______



答：$\frac{\sqrt{2}}{4}$

5.設四次多項式$f(x)=-x^4+x^3-x^2+x$，選取積分區間$a\le x\le b$，使得定積分$\int_a^b f(x)\,dx$得到最大值，求此最大值為______。

答：$\frac{13}{60}$

$f(x)=x(x^2+1)-x^2(x^2+1)=(x^2+1)x(1-x)$

$\int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{13}{60}$

6.一隻螞蟻在一個正四面體的某一個頂點A之上，此時它隨機選擇一個臨近的頂點(每個臨近的頂點B,C,D被選中的機率皆為1/3)，並且在一分鐘之後走到那裡；接著它又隨機選擇一個臨近的頂點，並在一分鐘之後走到那裡。假設這隻螞蟻一直以上述的方式在各個頂點之間走動，那麼在n分鐘之後，它的位置恰好在頂點A的機率為______。

答：$\frac{1}{4}[1+\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}]$

4

$\because \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{1}=-1 \Rightarrow y=\sqrt{n^2+1}$ ∴取 $P(n,\sqrt{n^2+1})$

$\lim_{n\to\infty} n\times\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\times n\times\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ #

3.

中×3
科×3
實×1
部×1
第×1
一×1

中分開−中分開∩至少2科相鄰+中分開3科相鄰

$C^8_3\times\frac{7!}{3!}-6!\times C^7_2+5!\times C^6_3$

$C^8_3\times\frac{7\times6\times5!}{6}-6!\times\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}+120\times\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}$

$=5!\times8\times7\times7-5!\times6\times7\times5+5!\times20$

$=5!\times202=24240$

1.

$\overrightarrow{NQ}=(1,2,-1)\Rightarrow P(t,2t,1-t)$ $t\in\mathbb{R}$

$t^2+4t^2+t^2-2t+1=1\Rightarrow t=\frac{1}{3}$

$P(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $S(0,0,-1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{PS}=(1,2,5)$

∴設$(s,2s,5s-1)\Rightarrow s=\frac{1}{5}$

∴設$(\frac{1}{5},\frac{2}{5},0)$

2

設中位數為n号球

$1+2+\cdots+n\ge 60.5$

$\Rightarrow n(n+1)\ge 121$

∴ $n=10$ $10\times11=110$

$n=11$ $11\times12>121\Rightarrow n=11$

最小期望值Z

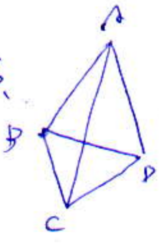
$Z=\sum_{k=1}^{15}k|11-k|\times\frac{i}{120}$

$=\frac{1}{120}\times\left[\sum_{k=1}^{10}11k-k^2+\sum_{k=11}^{15}(k^2-11k)\right]$

$=\frac{1}{120}\times\left[-\frac{10\times11\times21}{6}+11\times\frac{10\times11}{2}-11\times\frac{5\times26}{2}+\frac{15\times16\times31}{6}-\frac{10\times11\times21}{6}\right]$

$=\frac{1}{120}(-110+658)=\frac{\cancel{548}\ 137}{\cancel{120}\ 30}=\frac{137}{30}$ #

6.



a_n=表第n分鐘落A機率

$a_1=0$

$a_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times3=\frac{1}{3}$

$a_3=(1-a_2)\times\frac{1}{3}$

$a_4=(1-a_3)\times\frac{1}{3}$

$\Rightarrow a_n=(1-a_{n-1})\times\frac{1}{3}\Leftrightarrow(a_n+p)\times3=-(a_{n-1}+p)$

∴$-3p-p=1\Rightarrow p=\frac{-1}{4}$

∴$(a_n-\frac{1}{4})=\frac{-1}{3}(a_{n-1}-\frac{1}{4})$

$A_n=a_n-\frac{1}{4}\Rightarrow A_1=-\frac{1}{4}$, $r=-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow A_n=\frac{-1}{4}(\frac{-1}{3})^{n-1}$

∴$a_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}\Rightarrow a_n=\frac{1}{4}(1+\frac{(-1)^n}{3^{n-1}})$

$n=1,2,\ldots$

7. 設 $x\neq\pm1, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$，解有理方程式 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{2x}{1-x^2}+\frac{3x-x^3}{1-3x^2}}{1-\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{3x-x^3}{1-3x^2}}$，得 x 的最大值為________。

答：$\tan78^\circ$(或 $\tan\frac{13\pi}{30}$)

8. 設 x 為實數且滿足 $1\le x<2$，試求滿足方程式 $2x^2-[2x^2]=2(x-[x])^2$ 的解，其個數有多少=______。(註：$[x]$為不大於 x 的最大整數)。

答：3

9. 設 a,b 為正實數，$A=\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{2}ab}$，$B=\sqrt{49+a^2-7\sqrt{2}a}$，$C=\sqrt{64+b^2-8\sqrt{3}b}$
則 $A+B+C$ 之最小值=__________。

答：送分

10. 若多項式 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{11}$ 的展開式為 $1+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{43}x^{43}+x^{44}$，試求 $a_6=$_____。

答：7887

$p+q+r+s+t=11$

$q+2r+3s+4t=6$

11. 三次曲線 $y=x^3+ax^2+x+1$，若由原點可作三條相異之切線，試求實數 a 的範圍為____________。

答：$a>3$

12. 設函數 $y=f(x)=\frac{x^2}{1-x}$，求 $\frac{f^{(6)}(0)}{f^{(4)}(0)}=$_____。【註：$f^{(n)}(a)$ 表示在 x=a 處的 n 階導數】

答：30

13. 設有一階梯共有 20 階，每次只能走 2 階或 3 階，第 8 階階梯壞掉不能踩且必須踩上第 12 階的上樓方法數=________。

答：32

14. 多項式 $f(x)$，已知 $\deg f(x)=98$，$f(k)=\frac{1}{k}(k=1,2,3,\cdots,99)$，試求 $f(100)=$_____。

答：$\frac{1}{50}$

7.

設 $\tan\theta=x \Rightarrow \tan2\theta=\frac{2x}{1-x^2}$

$\tan3\theta=\tan(2\theta+\theta)=\dfrac{\frac{2x}{1-x^2}+x}{1-\frac{2x}{1-x^2}\cdot x}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

$\therefore \tan5\theta=\frac{1}{\sqrt3} \Rightarrow 5\theta=30^\circ+k\pi,\ k=0,1,2,3,4$

$\theta=6^\circ+36^\circ k \Rightarrow \{6^\circ, 42^\circ, 78^\circ, 114^\circ\}$

最大值

$\therefore \tan78^\circ=x$ #

8.

$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow 2\le 4x-2<6$

$2x^2-[2x^2]=2(x-1)^2=2x^2-4x+2$

$\Rightarrow [2x^2]=4x-2$ $\qquad [2x^2]=2,3,4,5$

① $[2x^2]=2$ $\quad x=1$

② $[2x^2]=3$ $\quad x=\frac{5}{4}$

③ $[2x^2]=4$ $\quad x=\frac{3}{2}$

④ $[2x^2]=5$ $\quad x=\frac{7}{4}$ (不合)

$\therefore [2x^2]=2,3,4 \Rightarrow 3$ 解

9.

$A^2=a^2+b^2-\sqrt2 ab \Rightarrow \theta_1=45^\circ$

$B^2=7^2+a^2-\sqrt2\times7\times a \Rightarrow \theta_2=45^\circ$

$C^2=8^2+b^2-\sqrt3\times8\times b \Rightarrow \theta_3=30^\circ$

A+B+C 最小值

$=\sqrt{8^2+7^2-2\times8\times7\times(-\frac{1}{2})}$

$=\sqrt{64+49+56}=\sqrt{169}$

$=13.$

$\therefore$ 最小值 $=13$

10.

p	q	r	s	t
9	0	1	0	1
8	2	0	0	1
9	0	0	2	0
8	1	1	1	0
7	3	0	1	0
8	0	3	0	0
7	2	2	0	0
6	4	1	0	0
5	6	0	0	0

$\frac{11!}{9!}=11\times10=110$

$\frac{11!}{8!\times2!}=\frac{11\times10\times9}{1\times2}=495$

$\frac{11!}{9!2!}=\frac{11\times10}{1\times2}=55$

$\frac{11!}{8!}=11\times10\times9=990$

$\frac{11!}{7!3!}=\frac{11\times10\times9\times8}{3\times2\times1}=1320$

$\frac{11!}{7!2!2!}=\frac{11\times10\times9\times8}{4}=1980$

$\frac{11!}{6!4!}=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=2310$

$\frac{11!}{5!6!}=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$

$\frac{11!}{8!3!}=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$

合計 7887 #

11.

$y=x^3+ax^2+x+1 \rightarrow y_0=x_0^3+ax_0^2+x_0+1$

$y'=3x^2+2ax+1$

設切點 (x_0, y_0)

$\frac{y_0-0}{x_0-0}=3x_0^2+2ax_0+1$

$\Rightarrow x_0^3+ax_0^2+x_0+1=3x_0^3+2ax_0^2+x_0$

$\Rightarrow 2x_0^3+ax_0^2-1=0$

設 $g(t)=2t^3+at^2-1$

$g'(t)=6t^2+2at = 2t(3t+a)$

$g'(t)=0 \Rightarrow t=0$ or $\frac{-a}{3}$

∵有三條相異切線 $\Rightarrow g(0)\cdot g(-\frac{a}{3})<0$

∴ $(-1)\times(\frac{-2a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-1)<0$

$\Rightarrow \frac{a^3}{9\times3}>1 \Rightarrow a>3$ #

12.

$y=f(x)=\frac{x^2}{1-x} \Rightarrow \begin{cases} 首項\ x^2 \\ 公比\ x,\ |x|<1 \end{cases}$

∴ $\frac{x^2}{1-x}=x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots$

$f'(x)=2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+\cdots$

$f^{(2)}(x)=1\times2+2\times3x+3\times4x^2+5\times4x^2+5\times6x^4+6\times7x^5+8\times7x^6+\cdots$

$f^{(3)}(x)=2\times3+2\times3\times4x+3\times4\times5x^2+4\times5\times6x^3+5\times6\times7x^4+6\times7\times8x^5+\cdots$

$f^{(4)}(x)=2\times3\times4+2\times3\times4\times5x+\frac{6!}{2!}x^2+\frac{7!}{3!}x^3+\frac{8!}{4!}x^4+\cdots$

$f^{(5)}(x)=5!+6!x+\frac{7!}{2!}x^2+\frac{8!}{3!}x^3+\cdots$

$f^{(6)}(x)=6!+7!x+\frac{8!}{2!}x^2+\cdots$

∴ $\begin{cases} f^{(6)}(0)=6! \\ f^{(4)}(0)=4! \end{cases} \Rightarrow \frac{6\times5}{1}=30$ #

$f^{(n)}(x)=n!+(n+1)!x+\frac{(n+2)!}{2!}x^2+\frac{(n+3)!}{3!}x^3+\cdots$

13.

a_n=表n階走法

$a_1=0$	□	$a_5=2$
$a_2=1$	□□	$a_6=2$
$a_3=1$	□□□	$a_7=3$
$a_4=1$	□□□□	$a_8=4$
	□□□□□	

$a_5=a_2+a_3$

$a_6=a_4+a_3$

∴ $a_n=a_{n-2}+a_{n-3}$, $n\ge3$

∵第8階不踩 第12階必踩

8階

x

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

① 踩第9階者 $a_9=a_6+a_7=5$

② 10 →者 $a_{10}=a_7=3$

∴ $(5+3)\times4=32$

14.

$\begin{cases} \deg f(x)=98 \\ f(k)=\frac{1}{k}\ (k=1,2,\cdots 99) \end{cases} \Rightarrow$ 設 $F(x)=xf(x)-1$

$\deg F(x)=99$

$F(x)=xf(x)-1=a(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$

$F(0)=-1=(-1)\times a\times99! \Rightarrow a=\frac{1}{99!}$

$F(100)=\frac{1}{99!}\times99!=100f(100)-1 \Rightarrow f(100)=\frac{1}{50}$ #