

# 國立臺灣師大附中 102 學年度第二次教師甄試 數學科試題

第一部分填充題：有 6 小題，每小題 5 分，共 30 分。

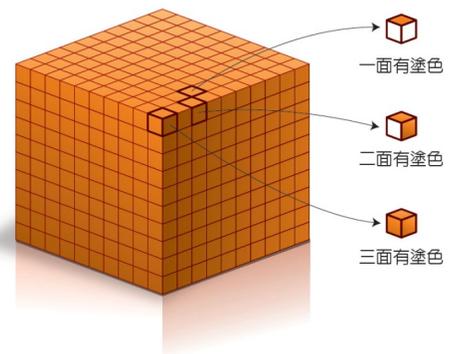
1. 若  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{當 } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{當 } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ，且滿足  $f(x+2) = f(x)$ ，則  $y = f(x)$  圖形與  $y = \frac{1}{8}x$  圖形的交點有\_\_\_\_\_個。

2. 將 *STARWARS* 八個字母任意地排成一列，相同字母皆不相鄰的方法數為\_\_\_\_\_。

3. 空間中有三個的向量長度皆為 2 且任兩向量夾角皆為  $60^\circ$ ，則此三向量所張出的平行六面體體積為\_\_\_\_\_。

4. 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則  $A^{102} =$ \_\_\_\_\_。

5. 將一個六面均塗上灰色的正方體木塊，各邊皆十等分，共切割成 1000 個大小相同的小正方體後放入袋中，如右圖所示。從袋中任取一個小正方體，以隨機變數  $X$  表示取出的小正方體灰色面的數目，則隨機變數  $X$  的期望值為\_\_\_\_\_。



6. 設  $y = x^2$  與  $x = y^2$  所圍區域為  $R$ ，則區域  $R$  繞  $y$  軸旋轉所得的旋轉體體積為\_\_\_\_\_。

第二部分填充題：有 8 小題，每小題 6 分，共 48 分

1.  $\tan 25^\circ \tan 85^\circ + \tan 85^\circ \tan 145^\circ + \tan 145^\circ \tan 25^\circ$  的值為\_\_\_\_\_。

2. 設稜長 2 的正四面體  $T$  有一內切球  $S$ ，在  $T$  的其中一角作一球  $S_1$ ，使其與  $S$  外切且與角的三面都相切，再作一球  $S_2$ ，使其與  $S_1$  外切且與角的三面都相切，如此繼續下去，則所有球體  $S, S_1, S_2, \dots$  的體積和為\_\_\_\_\_。

3. 圓周上 10 個相異點，任兩點都可連出一條弦，則所有連出的弦最多可將此圓內部分成\_\_\_\_\_個區域。

4. 方程式  $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$  的三根為  $a, b, c$ ，則  $a^6 + b^6 + c^6 =$ \_\_\_\_\_。

5. 函數  $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$  的最大值為\_\_\_\_\_。

6. 在1到2013的正整數中擁有最多個正因數的數為\_\_\_\_\_。

7. 若  $\sum_{k=1}^{20} k^2 \cdot C_k^{20} = a \cdot 2^{20}$ ，則  $a =$ \_\_\_\_\_。

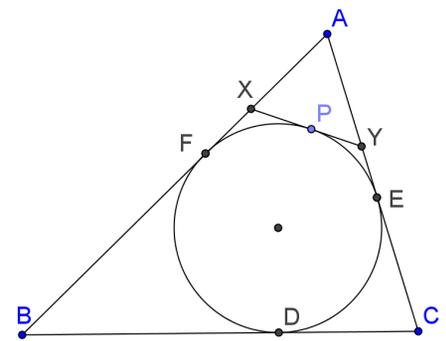
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1}) =$ \_\_\_\_\_。

第三部分證明題：第1小題7分，第2小題7分，第3小題8分，共22分

1. 證明： $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{8}{9} \times \dots \times \frac{2012}{2013} < \frac{1}{10}$

2. 給定三角形  $ABC$ ，其內切圓在  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$  的切點分別是  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ；過  $EF$  弧上一點  $P$  作內切圓的切線，分別交

$$\overline{AB}、\overline{AC} \text{ 於 } X、Y。 \text{ 試證： } \frac{\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}}{\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}} + \frac{\frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}}{\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}} = 1$$



3. 若四面體  $O-ABC$  中， $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ ， $\overline{OB} \perp \overline{OC}$ ， $\overline{OC} \perp \overline{OA}$ ，以下  $(\Delta ABC)$  表  $\Delta ABC$  的面積。

請用兩種不同的方法證明「空間中的畢氏定理」： $(\Delta ABC)^2 = (\Delta OAB)^2 + (\Delta OBC)^2 + (\Delta OCA)^2$

國立臺灣師大附中 102 學年度第二次教師甄試 數學科答案卷

第一部分填充題：有 6 小題，每小題 5 分，共 30 分。

1.	2.	3.	4.	5.	6.
8	2220	$4\sqrt{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 102 & 5253 \\ 0 & 1 & 102 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$

第二部分填充題：有 8 小題，每小題 6 分，共 48 分

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
-3	$\frac{8\sqrt{6}}{189}\pi$	256	-6	$\sqrt{10}$	1680	105	$-\frac{1}{6}$