

科目：數學科

選擇題：共 40 題，每題 2.5 分，總分 100 分

(D) 1. $(1 + \tan 15^\circ)(1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$ 之值為何？

- (A) $5 - 3\sqrt{2}$ (B) $6 - 3\sqrt{2}$ (C) $5 - 2\sqrt{3}$ (D) $6 - 2\sqrt{3}$

(B) 2. 若 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 是方程式 $3x^2 - x + a = 0$ 的兩根，則 a 之值為何？

- (A) $-\frac{3}{4}$ (B) $-\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$

(A) 3. 已知矩形 $ABCD$ 的外接圓圓心為 O ，且圓心角 $\angle AOB = 60^\circ$ 。若此圓心角與圓弧所圍的扇形面積為 $\frac{32\pi}{3}$ ，則矩形 $ABCD$ 的面積為何？

- (A) $64\sqrt{3}$ (B) $68\sqrt{3}$ (C) $72\sqrt{3}$ (D) 128

(C) 4. 設圓 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圓，圓心 O 在 $\triangle ABC$ 的內部。若圓心角 $\angle AOB = 120^\circ$ 且 $\angle BOC = 150^\circ$ ，則 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ 的比值為何？

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(C) 5. 坐標平面上，已知 $A(a, \sqrt{3})$ 、 $B(b, -\sqrt{3})$ 是圓 $(x-1)^2 + y^2 = 7$ 上的相異兩點，則 \overline{AB} 長度的最大值為何？

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $3\sqrt{5}$

(B) 6. 已知滿足周長為 10、面積為 $2\sqrt{5}$ 的等腰三角形恰有兩種，其中之一是三邊長為 3、3、4 的三角形，另一種是邊長為 a 、 a 、 b 的三角形，其中 $b \neq 4$ ，則 b 之值為何？

- (A) $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ (B) $\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ (C) $\frac{-1 + \sqrt{15}}{2}$ (D) $\frac{1 + \sqrt{15}}{2}$

(B) 7. 下列哪一個方程式有正的實數解？

- (A) $x^2 + 7x + 9 = 0$ (B) $\frac{1}{2^x} = x$ (C) $\log_{10}(x^3 + 1) = -1$ (D) $\sin(3x) = \sqrt{2}$

(C) 8. 設 a, b 為實數，若不等式 $x^2 + ax + b > 0$ 的解為 $x > 2$ 或 $x < -3$ ，則 $x^2 + ax + b < 6$ 的解為何？

- (A) $x > 3$ 或 $x < -2$ (B) $-3 < x < 2$ (C) $-4 < x < 3$ (D) $-6 < x < 2$

(D) 9. 若 a 為實數，且圓 $(x-a)^2 + y^2 = 4$ 的圖形與直線 $4x - 3y - 6 = 0$ 相交，但與直線 $3x + 4y + 1 = 0$ 不相交，則實數 a 的範圍為何？

- (A) $0 < a \leq 1$ (B) $1 < a \leq 2$ (C) $2 < a \leq 3$ (D) $3 < a \leq 4$

(B) 10. 若實數 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 形成一等比數列，前三項之和 $a_1 + a_2 + a_3 = -7$ ，而末三項之和 $a_5 + a_6 + a_7 = -567$ ，則中間三項之和 $a_3 + a_4 + a_5$ 為何？

- (A) 63 (B) -63 (C) 81 (D) -81

- (B) 11. 將 7 枝相同的筆放入紅、黃、藍三個不同的鉛筆盒中，若每個鉛筆盒至少放入一枝筆，則有多少種不同的分法？
 (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 21
- (C) 12. 從 1,2,3,4,5,6,7,8,9 這九個數中，任取相異的三個數，則此三數可以排成等差數列的機率為何？
 (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{4}{21}$ (D) $\frac{9}{42}$
- (D) 13. 用 1,2,3,4 排成的五位數中，滿足數字 1 和 2 都至少出現一次的五位數有幾個？
 (A) 454 (B) 486 (C) 538 (D) 570
- (A) 14. 設 a, b, c 為實數， $a \neq 0$ ， $b^2 - 3ac = 0$ 。請問三次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ 有幾個相異實根（重根只算一個）？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 無法判定
- (C) 15. 設 a 為正整數， a_8 表示 a 的 8 進位表示法。求 $257_8 \times 361_8 = ?$
 (A) 212277_8 (B) 201577_8 (C) 122277_8 (D) 113277_8
- (B) 16. 求 $50!$ 展開後末尾有幾個零？
 (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16
- (D) 17. 若 (a, b, c) 為方程組 $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 4x + y + 3z = 8 \end{cases}$ 的一組解且 $a \neq 1$ ，則 $(a-1):(b-1):(c-1) = ?$
 (A) 1:1:1 (B) 1:1:-1 (C) 1:-1:1 (D) -1:1:1
- (B) 18. 若 $x = \frac{1 + \sqrt{2014}}{2}$ ，則多項式 $(2x^2 - 2x - 1006)^{2015} \cdot (4x^3 - 2017x - 2015)^{2014} = ?$
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2
- (A) 19. 若 a, b 為實數且 $ab + a + b = 17$ ， $a^2b + ab^2 = 66$ 。則 a 為下列哪一個方程式的解？
 (A) $x^2 - 11x + 6 = 0$ (B) $x^2 - 6x + 11 = 0$ (C) $x^2 + 11x - 6 = 0$ (D) $x^2 + 6x - 11 = 0$
- (B) 20. 已知矩形 $OABC$ 的頂點 A 在 x 軸上，頂點 C 在 y 軸上，且頂點 B 在第一象限， O 為原點。有一雙曲線 $xy = k$ ($x > 0$) 過 \overline{AB} 的中點 D ，且交 \overline{BC} 於 E 點，若四邊形 $ODBE$ 的面積為 2，則 $k = ?$
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- (B) 21. 求多項式 $(x^2 + x + 1)^5$ 展開的乘積中 x^7 項的係數為何？
 (A) 15 (B) 30 (C) 40 (D) 45
- (C) 22. 有一矩形，將其長增加 3，寬減少 50%。若新的矩形面積與原矩形面積相等，而原矩形的周長為新矩形的 1.6 倍，則原矩形的長與寬的差為何？
 (A) 25 (B) 27 (C) 30 (D) 33
- (D) 23. 坐標平面上三點 A, B, C 分別在直線 $y = -x$ 、 $y = x$ 、 $y = 2x + p$ 上，且向量 $\overrightarrow{AC} = (7, -6)$ 、 $\overrightarrow{BC} = (2, -7)$ ，則 p 之值為何？
 (A) -1 (B) -5 (C) -9 (D) -14

- (B) 24. 函數 $y = \sqrt{5-2x} + \sqrt{3+2x}$ 的最大值為何？
 (A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 5 (D) $5\sqrt{2}$
- (C) 25. 設等差數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 S_n ，已知 $a_4 \geq 8$ ， $a_5 \leq 10$ ，則 S_6 的最小值為何？
 (A) 30 (B) 38 (C) 42 (D) 50
- (B) 26. 設 $f(x) = \frac{1}{1+a \cdot 3^{bx}}$ 是一個定義在實數上的函數，其中 a 、 b 為兩個整數。若 $f(1) = \frac{3}{4}$ ， $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 區間上的最小值為 $\frac{1}{2}$ ，且滿足 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ，則 $f(3)$ 之值為下列者？
 (A) $\frac{15}{16}$ (B) $\frac{27}{28}$ (C) $\frac{64}{65}$ (D) $\frac{729}{730}$
- (A) 27. 給定函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，若 $f(x) = 0$ 時，各根之和、各根之積及 $f(x)$ 所有係數的和都相等，則這個共同的數值必須與下列何者相同？
 (A) x^2 的係數 (B) x 的係數 (C) $y = f(x)$ 圖形的 y 截距 (D) $y = f(x)$ 圖形的 x 截距的平均值
- (C) 28. 若數列 $\{a_n\}$ 前 n 項的和恆滿足 $S_n = p \times n \times a_n$ 且 $a_1 \neq a_2$ ，則 $p = ?$
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
- (C) 29. 試問大於 1，小於 100，且滿足 $(x^3 - \frac{1}{x^2})^n$ 的展開式中有不含 x 的項之正整數 n 總共有多少個？
 (A) 15 個 (B) 17 個 (C) 19 個 (D) 21 個
- (A) 30. 設 $f(x) = \sum_{k=1}^{20} (1+x)^k$ ，則其展開式中各項的係數和為何？
 (A) $2^{21} - 2$ (B) $2^{21} - 1$ (C) 2^{21} (D) $2^{21} + 1$
- (A) 31. 已知函數 $f(x) = 4x^2 - ax + 5$ 在區間 $(-\infty, -2)$ 上遞減，在區間 $(-2, +\infty)$ 上遞增，則 $f(2) = ?$
 (A) 53 (B) 35 (C) -11 (D) -35
- (B) 32. 若以點 $(2, 3)$ 、 $(3, 2)$ 為端點的線段與圓 $x^2 + y^2 - x - 4y + k = 0$ 相交，則 k 可為哪一個數？
 (A) -3 (B) -1 (C) 2 (D) 4
- (C) 33. 設 $a = 1.732$ 。下列哪一組大小關係是正確的？
 (A) $\sqrt{3} < a < \frac{3a+3}{a+3}$ (B) $\sqrt{3} < \frac{3a+3}{a+3} < a$ (C) $a < \frac{3a+3}{a+3} < \sqrt{3}$ (D) $\frac{3a+3}{a+3} < a < \sqrt{3}$
- (A) 34. 設 a 、 b (其中 $a < b$) 為方程式 $x^3 - 4x^2 - 17x + 60 = 0$ 的兩個正根。已知 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AC} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ， $\angle ACB = \frac{2}{3}\pi$ 。若 D 、 E 為 \overline{AB} 上的兩點，滿足 $\overline{BD} = \overline{BC}$ 、 $\overline{AE} = \overline{AC}$ ，則 $\triangle CDE$ 的面積為多少？
 (A) $\frac{15\sqrt{3}}{28}$ (B) $\frac{5\sqrt{3}}{28}$ (C) $\frac{15\sqrt{3}}{14}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$
- (D) 35. 有一等比的正數數列，設前三項之和為 A ，第一、第三、第五項之和為 B 。若 $A:B = 4:19$ ，則此數列的公比為何？
 (A) 1.5 (B) 2 (C) 2.4 (D) 2.5

- (C) 36. 在複數平面上，滿足方程式 $|z-4|=3|z-4i|$ 的點 z 形成一個圓。請問該圓的面積為多少？
- (A) $\frac{5\pi}{2}$ (B) 3π (C) $\frac{9\pi}{2}$ (D) 9π
- (A) 37. 已知正整數 n 是四個連續正整數的乘積，但不是 5 的倍數。請問 n 的十位數字為何？
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
- (C) 38. 考慮下列三個線型函數：
 $f(x, y) = x + 2y - 1$, $g(x, y) = 2x + y + 2$, $h(x, y) = -x + y + 3$.
 請問下列哪一組聯立不等式無解？
- (A) $f(x, y) > 0$, $g(x, y) > 0$, $h(x, y) > 0$ (B) $f(x, y) < 0$, $g(x, y) < 0$, $h(x, y) < 0$
- (C) $f(x, y) > 0$, $g(x, y) < 0$, $h(x, y) < 0$ (D) $f(x, y) < 0$, $g(x, y) > 0$, $h(x, y) > 0$
- (A) 39. 平面上有三個圓互相外切，其半徑分別為 12, 12, 3。現在三個圓的中間再畫一個小圓與這三個圓皆外切，請問這個小圓的半徑應為多少？
- (A) 1 (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{21}-1}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{43}-2}{5}$
- (D) 40. 對正整數 n ，考慮二次函數 $y = x^2 - 2x - n$ 的圖形：令其頂點到 x 軸的距離為 a_n ，圖形與 x 軸的兩交點距離為 b_n 。請問極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n^2}$ 為何？
- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$