

基隆市 103 學年度市立高中國中部
暨國民中學新聘教師聯合甄選「數學科」試題

注意事項：

1. 請核對答案卡上准考證號碼是否正確。
2. 每題均為單選題，請選出一正確答案或最佳答案；每題 1.25 分，答錯不倒扣，總分 50 分。
3. 請將答案以 2B 鉛筆畫記在答案卡上。

1. 某個按鈕，第一次按下可能亮紅燈或綠燈，兩者出現的機率都相等；前一次若出現紅燈，則再按下按鈕後出現紅燈的機率為 $\frac{1}{3}$ 、出現綠燈的機率為 $\frac{2}{3}$ ；前一次若出現綠燈，則再按下按鈕後出現紅燈的機率為 $\frac{3}{5}$ 、出現綠燈的機率為 $\frac{2}{5}$ 。試問按三次按鈕出現一次紅燈、兩次綠燈的機率為多少？
(A) $\frac{41}{75}$ (B) $\frac{8}{15}$ (C) $\frac{7}{15}$ (D) $\frac{34}{75}$
2. 設 $f(x) = \frac{1}{1+a \cdot 2^{bx}}$ 是一個定義在實數上的函數，其中 a 、 b 為兩個整數。若 $f(1) = \frac{4}{5}$ ， $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 區間上的最小值為 $\frac{1}{2}$ ，且滿足 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ，則 $f(3)$ 之值為下列者？
(A) $\frac{15}{16}$ (B) $\frac{32}{33}$ (C) $\frac{64}{65}$ (D) $\frac{128}{129}$
3. 設 L 是過拋物線 $y^2 = 8(x+2)$ 焦點 F ，且其斜角為 60° 的直線。若直線 L 與拋物線交於 A 、 B 兩點，而 \overline{AB} 的中垂線與 x 軸交於 P 點，則 $\overline{PF} = ?$
(A) $8\sqrt{3}$ (B) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{16}{3}$
4. 設 a 、 b 、 c 為實數，若 $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = k$ ，則所有可能的 k 之和為何？
(A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
5. 設 a 、 b 、 c 為實數， $f: [-1, 1] \rightarrow R$ 定義為 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 。已知當 $x \in [-1, 1]$ 時，函數 $f(x)$ 滿足 $|f(x)| \leq 1$ 。若 $g: [-1, 1] \rightarrow R$ 定義為 $g(x) = cx^2 + bx + a$ ，則在 $x \in [-1, 1]$ 時， $g(x)$ 之值是落在下列哪一個區間？
(A) $[-2, 1]$ (B) $[-1, 1]$ (C) $[-2, 2]$ (D) $[0, 3]$
6. 已知 a 、 b 、 c 、 d 為正整數滿足 $\log_a b = \frac{3}{2}$ ， $\log_c d = \frac{5}{4}$ 。若 $a - c = 9$ ，則 $b + d = ?$
(A) 165 (B) 157 (C) 149 (D) 140

7. 設 $A = \{x \in R : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, $B = \{x \in R : 2^{1-x} + a \leq 0 \text{ 且 } x^2 - 2(a+7)x + 5 \leq 0\}$ 。若 $A \subseteq B$, 則實數 a 是在下列哪一個區間內？
 (A) $[-4, -1]$ (B) $[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}]$ (C) $[-2, 0]$ (D) $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$
8. 設數列 $\{a_n\}$ 是將集合 $\{2^s + 2^t : 0 \leq s < t, s, t \text{ 為整數}\}$ 中的數由小排到大而成的數列, 則 $a_{103} = ?$
 (A) 20480 (B) 18432 (C) 17408 (D) 16896
9. 設 $\Gamma_1 : y = x^2 + 2x$, $\Gamma_2 : y = -x^2 + a$ 為兩條拋物線, 若這兩條拋物線恰有一條公切線, 則 $a = ?$
 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
10. 設 F_1 、 F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的兩個焦點, 點 P 是橢圓上的一點滿足 $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PF_2}} = 2$, 則 $\triangle PF_1F_2$ 的面積為下列何者？
 (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3
11. 已知 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 6$ 。設 D 為 \overline{AC} 上的一點, P 為 \overline{BD} 上的一點使得 $\angle APC = 90^\circ$ 。若 $\angle ABP = \angle BCP$, 則 $\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = ?$
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
12. 設數列 $\{a_n\}$ 滿足對所有的正整數 $n \geq 3$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ 。若 $a_{100} = 2$, $a_{200} = 3$, 則 $a_{103} = ?$
 (A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3
13. 若整數 x 、 y 、 z 滿足方程式 $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = 3$, 則 $|x| + |y| + |z|$ 的最大值為多少？
 (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13
14. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 其中 a 、 b 、 c 為整數。若 $f(0)$ 與 $f(-1)$ 都是奇數, 則下列哪一個敘述一定正確？
 (A) $f(x) = 0$ 有一個正根、兩個負根 (B) $f(x) = 0$ 恰有一個整數根
 (C) $f(x) = 0$ 不可能有三個整數根 (D) $f(x) = 0$ 有兩個正根、一個負根
15. 考慮所有可能的正整數 a , 其滿足 $2x + a = y$ 、 $a + y = x$ 、 $x + y = z$, 試問 $x + y + z$ 的最大值為下列何者？
 (A) -10 (B) -5 (C) 5 (D) 10
16. 若 a 、 b 、 c 是方程式 $x^3 - 6x^2 + 5x = 1$ 的三個根, 則 $a^5 + b^5 + c^5 = ?$
 (A) 2883 (B) 3281 (C) 3779 (D) 4198
17. 將分數 $\frac{19}{95}$ 分子的個位數與分母的十位數相同的數字「9」劃掉, 分子留下 1, 分母留下 5, 形成一個新的分數 $\frac{1}{5}$, 然而它與原來的分數等值, 即 $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$ 。試問在分子與分母都是二位數的真分數中, 總共有幾個分數滿足此性質？
 (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 4 個 (D) 6 個

18. 設 $f(x) = \frac{x^2 + a}{bx - c}$ ，其中 a 為整數， b, c 為非負整數。若 0 與 2 是恰存在的兩個實數使得 $f(x) = x$ ，且 $f(-2) < -\frac{1}{2}$ ，則 $f(x) = ?$
- (A) $\frac{x^2}{2(x-1)}, x \neq 1$. (B) $\frac{x^2}{3x-4}, x \neq \frac{4}{3}$. (C) $\frac{x^2}{2(5x-4)}, x \neq \frac{4}{5}$. (D) $\frac{x^2}{2(3x-5)}, x \neq \frac{5}{3}$.
19. 設 a 為正整數，若 $\sqrt{a-10} + \sqrt{a+17}$ 也是正整數，則所有可能的 a 之和為多少？
- (A) 178 (B) 187 (C) 198 (D) 209
20. 極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1} = ?$
- (A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) -2
21. 若正整數 $n \geq 2014$ 且除以 9 的餘數為 4，則 $8n+9$ 除以 12 的餘數為何？
- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7
22. 若正整數 n 滿足 $4n$ 除以 10 的餘數與 $6n$ 除以 12 的餘數都等於 6，則滿足條件的所有三位數正整數 n 之總和為何？
- (A) 44500 (B) 49860 (C) 54400 (D) 55400
23. 拋物線 $y = x^2 + 2x + 2$ 的圖形與下列哪一個函數的圖形有交點？
- (A) $y = \log(x+1)$ (B) $y = -3^x$ (C) $y = 3x-1$ (D) $y = x^5 - 5$
24. 從 $A = \{x^2 + x + 1, x^3 + 5x - 1, x^4 + 6x^2 + 2\}$ 與 $B = \{x^2 - 2, x^2 + x - 1, x^3 + 2x\}$ 兩組多項式中，各取出一多項式相乘得到它們的乘積，若多項式 $f(x)$ 表示所有這樣的乘積之和，則 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為何？
- (A) 51 (B) 15 (C) -51 (D) -15
25. 設某等腰梯形有一內切圓，若梯形的一腰長為 a 而內切圓直徑為 b ，則等腰梯形與內切圓的面積比為何？
- (A) $2a : b\pi$ (B) $4a : b\pi$ (C) $8a : b\pi$ (D) $16a : b^2\pi$
26. 在 $\triangle ABC$ 中，知道下列哪一個選項仍不一定能確定 $\triangle ABC$ 的面積？
- (A) 三高的長度 (B) 三中線的長度 (C) 三邊的長度 (D) 兩邊長及一內角的度量

27. 關於 $x = \frac{\sum_{k=0}^{10} C_k^{10} (\sqrt{3}+1)^k (\sqrt{3}-1)^{10-k}}{\sum_{j=0}^6 C_j^6 (\sqrt{6}+\sqrt{2})^j (\sqrt{6}-\sqrt{2})^{6-j}}$ 的敘述，下列何者是正確的？

- (A) x 是 12 的倍數 (B) x 是 9 的倍數
(C) x 是有理數，但不是整數 (D) x 是無理數

28. 在 $C_0^{41}, C_1^{41}, C_2^{41}, C_3^{41}, \dots, C_{41}^{41}$ 這 42 個組合數中，有多少個數是 205 的倍數？

- (A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 26

29. 已知雙曲線 $x^2 - y^2 - 12x + 17 = 0$ 的圖形上恰有四個點的 (x, y) 坐標均為整數，則以此四點為頂點的凸四邊形之面積為何？

- (A) 360 (B) 348 (C) 320 (D) 280

30. 關於 $x = \sqrt[4]{68-48\sqrt{2}}$ 的大小，下列何者是正確的？

- (A) $0.3 < x < 0.4$ (B) $0.4 < x < 0.5$ (C) $0.5 < x < 0.6$ (D) $0.6 < x < 0.7$

31. 單位圓的所有外切直角三角形中，面積最小值為何？

- (A) $2+2\sqrt{3}$ (B) $3+2\sqrt{3}$ (C) $2+3\sqrt{2}$ (D) $3+2\sqrt{2}$

32. 若函數 $f(x, y, z) = \sqrt{xy} + \sqrt{z}$ 在區域 $R = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z \leq 4\}$ 內的最大值發生在點 P ，則點 P 在下列哪一個平面上？

- (A) $x + y + z = 1$ (B) $x - y + z = 8$ (C) $x - y - z = 1$ (D) $x - y + 3z = 8$

33. 關於函數 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5k-1)x^k}{3^k}$ ，下列哪一個數學式成立？

- (A) $f(4) = 64$ (B) $f(-4) = \frac{-32}{49}$ (C) $f(1) = \frac{13}{4}$ (D) $f(-1) = \frac{-5}{8}$

34. 函數 $f(t) = \sqrt{\left(\frac{t^2}{8} - 7\right)^2 + (t - 12)^2} + \left|\frac{t^2}{8} - 1\right|$ 的最小值為何？

- (A) 10 (B) $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ (C) $\sqrt{109 - 6\sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{188 - 48\sqrt{2}}$

35. 坐標平面上將點 (a, b) 移到 $\left(\frac{b^2-a}{a+b+1}, \frac{a^2-b}{a+b+1}\right)$ 的過程，稱為「一次移動」。若依據同樣的規則，點 $(3, 5)$ 經過連續 20 次的移動後會到達點 (p, q) ，則 $p - q = ?$

- (A) 2 (B) 3 (C) -2 (D) -3

36. 若 $\|k\|$ 表示正整數 k 的最大奇因數，則 $\sum_{k=1}^{200} \frac{\|k\|}{k} = ?$
- (A) $132\frac{25}{128}$ (B) $132\frac{49}{128}$ (C) $133\frac{25}{128}$ (D) $133\frac{49}{128}$
37. 若 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 30^\circ$ ，則其內切圓半徑 r 與外接圓半徑 R 的比值 $\frac{r}{R}$ 為何？
- (A) $\frac{\sin A \sin B}{\sin A + \sin B + 2}$ (B) $\frac{\sin A \sin B}{\sin A + \sin B + 1}$ (C) $\frac{2 \sin A \sin B}{\sin A + \sin B + 2}$ (D) $\frac{2 \sin A \sin B}{2 \sin A + 2 \sin B + 1}$
38. 從一長方體的八個頂點中，任取三點可以構成直角三角形的三頂點之機率為何？
- (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) 不能確定
39. 滿足 $1 \leq a \leq b < c < d \leq e \leq 10$ 的整數數列 (a, b, c, d, e) 共有多少種？
- (A) 748 (B) 768 (C) 792 (D) 824
40. 已知 $f(n) = (5 + \sqrt{26})^n + (5 - \sqrt{26})^n$ 都是整數 ($n = 1, 2, 3, \dots$)，則下列哪一個數不是10的倍數？
- (A) $f(93)$ (B) $f(101)$ (C) $f(103)$ (D) $f(2104)$