101 高雄中學教甄(2012.5.5)參考解法(解法提供：Math Pro 的諸位熱心網友)
註：題目爲網友回憶收錄版本，非官方提供，正確版本請等雄中公告。

1.求行列式 $\begin{vmatrix} \tan 50^0 & \tan 40^0 & \tan 10^0 \\ \tan 70^0 & \tan 20^0 & \tan 50^0 \\ \tan 80^0 & \tan 10^0 & \tan 70^0 \end{vmatrix}$ 值。

2.袋中有 16 個球，白、紅、黃、黑各有 4 個，任取 4 個球，求恰含三個顏色的機率。

3.設 $x>0$ ，滿足 $[(x+1)(x-2)]=1+5x$ ，求 x 值。
彬註：我猜測此題的中括號指高斯符號。

4.設 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ，求 $(3\cos\alpha-2\cos\beta-5)^2+(2\sin\alpha-3\sin\beta+5)^2$ 的最小值。

5.多項式 $\deg f(x)=2$ ，
滿足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=7$ ， $\int_0^1 f(x)dx=-\dfrac{17}{6}$ ， $\sum\limits_{n=1}^{5} f(n)=130$ ，求 $f'(-1)$ 。

6.通過點 $(1,2)$ 的直線交雙曲線 $xy=1$ 於 A、B 兩點，求 $\overline{AB}$ 最小值。

7.給定數列 $\langle a_n\rangle$ ， $\forall n\in\mathbb{N}$ 滿足 $a_n>0$ 。 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ ，
已知 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{4S_k}{a_k+2}=S_n$ ， $\forall n\in\mathbb{N}$ ，求 S_{50} 。

8.證明： $\sin\dfrac{\pi}{13}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{13}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{13}\cdot\sin\dfrac{4\pi}{13}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{13}\cdot\sin\dfrac{6\pi}{13}=\dfrac{\sqrt{13}}{2^6}$ 。

9.設 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ，求 $2(A^{-1})^3-11(A^{-1})^2+15(A^{-1})-4I$ 。

10.四面體 ABCD， $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=a$ ， $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=b$ ，
求歪斜線 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的距離(以 a,b 表示)。

11.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{3n^2-2nk-k^2}\right)$ 值。

12.今爲雄中人明爲人中雄，此十字排成一列，問同字不相鄰的方法數。

13.方程式 $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=a$ 有三相異實根，求 a 範圍。

14. $x^3-2010x^2+x-2012=0$ 的三根爲 a,b,c ，求 $\begin{vmatrix} -2a & a+b & c+a \\ a+b & -2b & b+c \\ c+a & b+c & -2c \end{vmatrix}$ 值。

15.解方程組 $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ (a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0 \\ (a+b)(x-a)+(b+c)(y-b)+(c+a)(z-c)=0 \end{cases}$ 。

16.方程式 $x^4+2\sqrt{3}(\log_2 k)x^2+1-(\log_2 k)^2=0$ 有四個相異實根，求 k 範圍。

17.多項式 $\deg f(x)=2010$ ， $f(k)=\dfrac{1}{k},k=1,2,3,\cdots,2011$ ，求 $f(2012)$ 。

18.設 $m,h\in\mathbb{R}$ ， $(x-m)^2=4(y-mh)$ 圖形沿著 $y=mx$ 平移後產生新圖形，新舊兩圖形交點爲 $P(5,3)$ ，舊圖形在 P 點的切線斜率爲 m_1 ，新圖形在 P 點的切線斜率爲 m_2 ，且 $m_1+m_2=1$ ，求 m 值。

19.箱中有紅球白球各四顆，一次取兩顆且取後不放回，當被取出的紅球白球累積數量一樣時停止取球，求取球次數的期望值。

20.(此題題目未完整...)給定一點 A(? , ?)，已知 $\overline{A_nA}$ 斜率爲 $\dfrac{1}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ，給 $A_1(1,0)$ ， $A_n(a_n,a_{n-1})$ ，
給 a_n 遞迴關係式???，若 $\overline{A_nA}>$???，求 n 之最小？

參考解法：

1. $\begin{vmatrix} \tan 50^0 & \tan 40^0 & \tan 10^0 \\ \tan 70^0 & \tan 20^0 & \tan 50^0 \\ \tan 80^0 & \tan 10^0 & \tan 70^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tan 50^0 & \tan 40^0 & \tan(50^0-40^0) \\ \tan 70^0 & \tan 20^0 & \tan(70^0-20^0) \\ \tan 80^0 & \tan 10^0 & \tan(80^0-10^0) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \tan 50^0 & \tan 40^0 & \frac{1}{2}(\tan 50^0-\tan 40^0) \\ \tan 70^0 & \tan 20^0 & \frac{1}{2}(\tan 70^0-\tan 20^0) \\ \tan 80^0 & \tan 10^0 & \frac{1}{2}(\tan 80^0-\tan 10^0) \end{vmatrix} =0$。

2. $\dfrac{C_1^4(C_2^4)\cdot C_2^3(C_1^4C_1^4)}{C_4^{16}}=\dfrac{288}{455}$ 。

3.因 $y-1<[y]\le y$ ， $(x+1)(x-2)-1<[(x+1)(x-2)]\le(x+1)(x-2)$ ，
即 $(x+1)(x-2)-1<1+5x\le(x+1)(x-2)$ ，得 $3+\sqrt{12}\le x<3+\sqrt{13}$ ，
又 $(1+5x)\in\mathbb{N}$ ，得 $x=\dfrac{33}{5}$ 。

4. $P(-3+3\cos\alpha, 2+2\sin\alpha)\in\Gamma_1:\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ ，

$Q(2+2\cos\beta, -3+3\sin\beta)\in\Gamma_2:\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$ ，

Γ_1 與 Γ_2 對稱於 $y=x$ ，兩橢圓最短距離爲切線斜率平行 $y=x$ 時，
此時切線分別爲 $L_1: y=x+5-\sqrt{13}$ 與 $L_2: y=x-5+\sqrt{13}$ ，
所求= $\overline{PQ}^2 min=(d(L_1, L_2))^2=76-20\sqrt{13}$ 。

5. $f(x)=ax^2+bx+c$ ， $\begin{cases} 2a+b=7 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c=-\dfrac{17}{6} \\ 55a+15b+5c=130 \end{cases}$ ， $f(x)=2x^2+3x-5$ ， $f'(-1)=-1$ 。

6.設 $(y-2)=m(x-1)$ ，代入 $xy=1$ ，得 $x^2+\dfrac{(2-m)}{m}x-\dfrac{1}{m}=0$ ，設兩根 α, β ，

$\overline{AB}=|\alpha-\beta|\cdot\sqrt{m^2+1}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\cdot\alpha\beta}\cdot\sqrt{m^2+1}=\sqrt{(\dfrac{m-2}{m})^2-4\cdot\dfrac{-1}{m}}\cdot\sqrt{m^2+1}$ ，

$\overline{AB}=\sqrt{5+m^2+\dfrac{4}{m^2}}\ge\sqrt{5+4}=3$ ，等號成立於 $m=-\sqrt{2}$ (疑？剛好是焦弦)。

7.就一直 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ …

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{4S_k}{a_k+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}=\frac{4S_{n+1}}{a_{n+1}+2}$ ，

$4S_{n+1}=a_{n+1}(a_{n+1}+2)$ ， $4S_n=a_n(a_n+2)$ ，相減 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=0$ ，
得 $a_{n+1}=a_n+2$ ，等差數列，易知 $S_{50}=2550$ 。

8.考慮　$f(x)=x^{13}-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{12})=(x-1)(x^{12}+x^{11}+x^{10}+\cdots+x+1)$　，

$(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{12})=(x^{12}+x^{11}+x^{10}+\cdots+x+1)$　，

$|1-\omega|\cdot|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{12}|=(1^{12}+1^{11}+1^{10}+\cdots+1+1)=13$　，

$\overline{P_0P_1}\cdot\overline{P_0P_2}\cdots\overline{P_0P_{12}}=13$　，　$\omega^k=P_k=\cos\frac{k\cdot 2\pi}{13}+i\sin\frac{k\cdot 2\pi}{13}$　，

$(2\cdot\sin\frac{\pi}{13})\cdot(2\cdot\sin\frac{2\pi}{13})\cdots(2\cdot\sin\frac{12\pi}{13})=13$　，

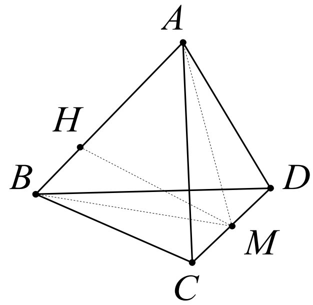
$\sin\frac{\pi}{13}\cdot\sin\frac{2\pi}{13}\cdot\sin\frac{3\pi}{13}\cdot\sin\frac{4\pi}{13}\cdot\sin\frac{5\pi}{13}\cdot\sin\frac{6\pi}{13}=\frac{\sqrt{13}}{2^6}$　。

9.　$B=A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$　，　$B^2-4B+I=O$　，　$2B^3-11B^2+15B-4I=(B^2-4B+I)(2B-3I)+(B-I)$　，

所求　$B-I=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$　。

10.公垂線段　$\overline{MH}$　，　$\overline{AM}=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$　，　$\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}b$　，　$\overline{AB}=a$　，

作　ΔABM　的高　$\overline{MH}=\overline{BM}\cdot\sin\angle ABM=\frac{b}{2a}\sqrt{3a^2-b^2}$　。



11.　$6\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{3-2\frac{k}{n}-(\frac{k}{n})^2}\right)=6\cdot\int_0^1\sqrt{4-(x+1)^2}\,dx=4\pi-3\sqrt{3}$

註：圓　$(x+1)^2+y^2=4$　在第一象限的面積。

12.取捨原理　$\frac{10!}{2^4}-C_1^4\cdot\frac{9!}{2^3}+C_2^4\cdot\frac{8!}{2^2}-C_3^4\cdot\frac{7!}{2^1}+C_4^4\cdot\frac{6!}{2^0}=96480$　。

13.註：原解法計算錯誤，感謝 MathPro 網友提醒。

令　$y=\frac{1}{x}$　，得　$f(y)=y^3+y^2-a=0$　有三相異實根，

解　$f'(x)=0$　的二實根　$\frac{-2}{3},0$　，由　$f(-\frac{2}{3})>0$　，　$f(0)<0$　，知　$0<a<\frac{4}{27}$　。

14.根與係數　$\begin{cases}a+b+c=2010\\ ab+bc+ca=1\\ abc=2012\end{cases}$　，令　$t=2010$　，　$\begin{cases}a+b+c=t\\ a^2+b^2+c^2=t^2-2\\ a^3+b^3+c^3=t^3+6\end{cases}$　，

$$\begin{vmatrix}-2a & a+b & c+a\\ a+b & -2b & b+c\\ c+a & b+c & -2c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2a & t-c & t-b\\ t-c & -2b & t-a\\ t-b & t-a & -2c\end{vmatrix}$$

$=t^3\cdot(2)+t^2\cdot(0)+t\cdot(2ab+2bc+2ca-4a^2-4b^2-4c^2)+t^0\cdot(2a^3+2b^3+2c^3-10abc)$

$=2\cdot t^3+t(-4t^2+10)+(2t^3-10t-8)=-8$

15.由　$\begin{cases}(x-a)\cdot 1+(y-b)\cdot 1+(z-c)\cdot 1=0\\ (x-a)\cdot(a+b)+(y-b)\cdot(b+c)+(z-c)\cdot(c+a)=0\end{cases}$　，視爲兩個內積等於零

知　$(x-a):(y-b):(z-c)=(a-b):(b-c):(c-a)$　(外積)，

令　$(x-a)=t(a-b),(y-b)=t(b-c),(z-c)=t(c-a)$　，

代入　$(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0$　，得　$t=-\frac{1}{2}$　，即　$x=\frac{a+b}{2},y=\frac{b+c}{2},z=\frac{c+a}{2}$　。

16.令 $y=x^2\geq 0, t=\log_2 k$ ，得 $y^2+2\sqrt{3}t\,y+(1-t^2)=0$ 有兩相異正根，

$\begin{cases} D=B^2-4AC=12t^2-4(1-t^2)>0 \\ \alpha+\beta=-2\sqrt{3}t>0 \\ \alpha\beta=1-t^2>0 \end{cases}$ ，得 $-1<t<-\dfrac{1}{2}$ ，即 $\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 。

17.令 $g(x)=x\cdot f(x)-1=c(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2011)$ ，

由 $g(0)=-1$ ，得 $c=\dfrac{1}{2011!}$ ，

$g(2012)=2012\cdot f(2012)-1=\dfrac{1}{2011!}(2012-1)(2012-2)\cdots(2012-2011)=1$ ，

$f(2012)=\dfrac{1}{1006}$ 。

18. $P(5,3)\in\Gamma:(x-m)^2=4(y-mh)$ ， $(5-m)^2=(3-mh)$ ，

設直線 $(y-3)=m(x-5)$ 與 Γ 的另一交點Q，

解 $\begin{cases}(y-3)=m(x-5) \\ (x-m)^2=4(y-mh)\end{cases}$ ，得 $Q(6m-5,6m^2-10m+3)$ ，

$y'=f'(x)=\dfrac{x-m}{2}$ ， $m_1+m_2=f'(5)+f'(6m-5)=\dfrac{5-m}{2}+\dfrac{5m-5}{2}=1$ ， $m=\dfrac{1}{2}$ 。

19.請自畫樹狀圖，

(A)一次結束=(RW)，

(B)二次結束=(RR)(WW)，

(C)三次結束=(RR)(RW)(WW)，

(D)四次結束=(RR)(RR)(WW)(WW)或(RR)(RW)(RW)(WW)，

$p(A)=\dfrac{C_1^4C_1^4}{C_2^8}=\dfrac{4}{7}$ ， $p(B)=2\cdot\dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{C_2^4}{C_2^6}=\dfrac{6}{35}$ ， $p(C)=2\cdot\dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{C_1^4C_1^2}{C_2^6}\cdot\dfrac{C_2^3}{C_2^4}=\dfrac{4}{35}$ ，

$p(D)=2\cdot\dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_2^6}\cdot\dfrac{C_2^4}{C_2^4}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_2^2}+2\cdot\dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{C_1^4C_1^2}{C_2^6}\cdot\dfrac{C_1^1C_1^3}{C_2^4}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_2^2}=\dfrac{1}{7}$ ，

$E=1\cdot p(A)+2\cdot p(2)+3\cdot p(3)+4\cdot p(4)=\dfrac{64}{35}$ 。(沒想到啥簡捷的方法...)