101 年國立臺南家齊女子高級中學教師甄選 數學科 專任及代理 題目卷

一、填充題：(每題 6 分，共 60 分)

1、試求下列極限：(i). $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$ =______。 (3 分)

(ii). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ = ______。(3 分)

2、解不等式: $\log_{14}(x^3-5x+12)>1$ ______。

3、設無窮級數: $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3^k}+\frac{1}{2^k})$ =A，又 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k(k+2)}$ =B，求 A + B = ______。

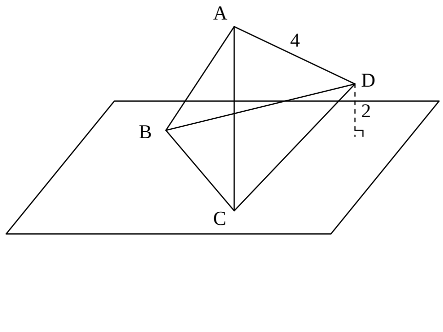
4、平面上如果直線 Y= X + K 與 橢圓 $9x^2+y^2=18$ 相交於兩相異點，試求實數 K 的範圍? ______。

5、試求級數 $\left[\frac{1^3}{2}\right]+\left[\frac{2^3}{3}\right]+\left[\frac{3^3}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{99^3}{100}\right]+\left[\frac{100^3}{101}\right]$ =______。（$[x]$ 爲高斯函數）

6、設 k 爲整數。若多項式 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)+124$ 有整係數之一次因式，試求 k =______。

7、將相同大小的 20 顆紅球、20 顆黑球、20 顆白球，分成各 30 個的兩堆，試問有______種不同分法。

8、置於桌面上的正四面體 $A-BCD$，稜長爲 4。現以 $\overline{BC}$ 稜爲軸，將 D 點提起，與桌面距離爲 2，如圖所示；試求頂點 A 與桌面的距離爲______。



9、設 $S=\{1,2,3,\cdots,200\}$，

若將集合 S 中的 200 個自然數凡是能被 2 所整除的數都乘以 (-1)，改爲負數；

之後，再將這些數中能被 3 所整除的數都乘以 (-1)；

接著，再將這些數中能被 5 所整除的數都乘以 (-1)；

則經過此三次修改後，這 200 個數的總和變爲______。

10、有一雙曲線的中心點爲平面座標的座標原點 O，其兩焦點都落在 x 軸上，另有一斜率爲 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直線通過此雙曲線之右焦點，且與雙曲線交於 P 、 Q 兩點；已知 $\overline{OP}\perp\overline{OQ}$，$\overline{PQ}=4$，求此雙曲線方程式______。

二、計算題：(每題 10 分，共 40 分)

1、設 $A=\begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$O$ 爲三階零方陣。試問是否存在非零三階方陣 X,Y 使 $AX=O$，$BY=O$？存在，請舉例；不存在，請證明。

2、試找出下列方程組中所有的實數解 (x,y)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=(x^2+3y^2)(3x^2+y^2) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=2(y^4-x^4) \end{cases}$$

3、在箱中放著 7 張卡片，其上編有從 1 到 7 的數字，每張有一個各不相同的數字。從箱中任意的取出一張卡片，再放回箱中，這樣的試驗反覆進行 n 次，並記 n 次取出卡片上的數字總和爲 S_n。設 $S_n=4k+1$ ($k\in\mathbb{Z}$)的機率爲 P_n，試回答下列問題：

(1) 求機率 P_1 (1 分)、 P_2 (2 分)之值

(2) 試以 P_n 表 P_{n+1}(3 分)

(3) 求 P_n 之值(4 分)

4、試求 有多少個相異的多項 $f(x)=x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ 同時滿足下列 2 個條件：

(1) a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、a_7 爲集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 中七個相異元素。

(2) $f(x)$ 可被 x^3+x^2+x+1 整除。

101 年國立臺南家齊女子高級中學教師甄選 數學科 初試參考答案

一、填充題：

１、（１）$\frac{1}{e}$　（２）$\frac{3}{2}$

２、$-2<x<1-\sqrt{2}$ 或 $x>1+\sqrt{2}$

３、８

４、$-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$

５、333300

６、62 或 65

７、166

８、$\frac{10}{3}$

９、718

１０、$x^2-\frac{y^2}{3}=1$