

一、填充題：

- 求方程式 $6x^6 + 5x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 11x^2 - x - 6 = 0$ 之所有有理根之和為 $\boxed{-\frac{5}{6}}$ 。
- 擲一公正骰子 n 次，出現的最大點數為 M ，最小點數為 m ，滿足 $M - m < 5$ 的機率為 P_n ，求 $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \boxed{8}$ 。
- 恰有3個數字相同的四位數共有 $\boxed{324}$ 個。
- 矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ 3 & 3-a \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $P = A - I$ 且 $P^2 = P$ ，
 - 求 a 、 b 的關係式 $\boxed{a^2 - 3a - 3b + 2 = 0}$ 。
 - $A^{-1} = sP + tI$ ， $s, t \in R$ ，則數對 $(s, t) = \boxed{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)}$ 。
- 等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，前 n 項和為 S_n ，若 $S_{2013} = 3102$ ， $S_{3102} = 1302$ ，則 $S_{5115} = \boxed{\frac{-93000}{11}}$ 。
- 設一球面的半徑為2，球心在直線 $L: x = \frac{y}{2} = z + 1$ 上，此球面與 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面所交成的圓面積和為 S ，求 S 的最大值為 $\boxed{\frac{67}{6}\pi}$ ，此時球面的球心坐標為 $\boxed{\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{6}\right)}$ 。
- 設有 A 、 B 、 C 三個硬幣，出現正面的機率依次為50%、30%、60%。今任選一枚硬幣投擲，若出現正面，則用原硬幣再投擲第二次；若第一次投擲反面，則由其餘兩枚中再任選一枚投擲第二次
 - 求兩次均為正面的機率 $\boxed{\frac{7}{30}}$ 。
 - 若已知兩次均投擲同一枚的條件下，求這枚為 C 硬幣的機率為 $\boxed{\frac{3}{7}}$ 。
- 已知有5個正整數，其算術平均數為12，全距為18，中位數與眾數均為8，試問第二大的數之可能值有 $\boxed{6}$ 個。
- 首先觀察有限小數37.108在小數點前後共寫了5個阿拉伯數字，現在若把 $\frac{3^{100}}{2^{50}}$ 寫成小數型式，則整個數值在小數點前後共需寫出 $\boxed{83}$ 個阿拉伯數字。

二、計算證明題：自行標號且須有過程，否則不予計分。

1. 已知 x, y, z 均為實數且 $x + y + z = 1$ ，求證 $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$

耀昇提出下列解法：

$$\text{設 } x = \frac{1}{3} - t, y = \frac{1}{3} - 2t, z = \frac{1}{3} + 3t, \text{ 則 } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} + 14t^2 \geq \frac{1}{3} \text{ 得證}$$

但此種解法是錯誤，請指出錯誤之處並寫出您的證法。

2. 若 $f(x) = x^2 - x + b$ ，且 $f(\log_2 a) = b$ ， $\log_2 f(a) = 2(a > 0, a \neq 1)$ 。

(1) $f(\log_2 x)$ 的最小值及相應的 x 值。

(2) 若 $f(\log_2 x) > f(1)$ 且 $\log_2 f(x) < f(1)$ ，求 x 的範圍。

3. 設 $a + b + c = 3$ ， $a^2 + b^2 + c^2 = 45$

(1) 求 $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = ?$

(2) 求 $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = ?$

4. (1) 設 a_1, a_2, \dots, a_n ； b_1, b_2, \dots, b_n 均為正數，

$$\text{求證：} \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \times \dots \times (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}$$

(2) 設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，求 $\frac{1}{\cos^3 \theta} + \frac{32}{\sin^3 \theta}$ 之最小值