

# 102 學年度南臺灣國民中學教師甄選命題策略聯盟筆試試題

## 專門科目-數學

說明：

本試卷共 50 題，均為四選一之單選題。每題 2 分，共 100 分。

1. 已知一個二位數是其數字和的  $n$  倍，如果將此二位數的十位數字與個位數字互換得到一個新的二位數，則此新數是其數字和的幾倍？

(A)  $9-n$  (B)  $10-n$  (C)  $11-n$  (D)  $n-1$

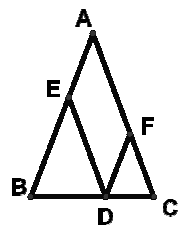
2. 自  $1, 2, 3, \dots, 9$  這 9 個數中選出 7 個不同的數相加，其和是 3 的倍數，試問共有多少種不同的選法滿足上述條件？

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

3. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ ， $D, E, F$  分別為三邊  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  及  $\overline{AC}$  上的點，使得

$\overline{AE} \parallel \overline{DF}$  與  $\overline{AF} \parallel \overline{ED}$ 。則四邊形  $AEDF$  的周長為何？

(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35



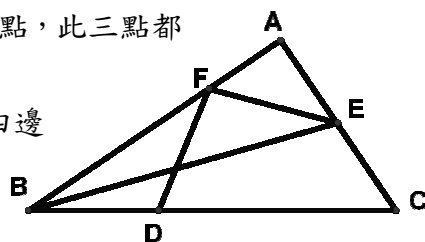
4. 設  $\alpha, \beta, p, q, r, s$  為實數，如果  $\tan \alpha$  和  $\tan \beta$  為方程式  $x^2 - px + q = 0$  的二根，且  $\cot \alpha$  和  $\cot \beta$  為方程式  $x^2 - rx + s = 0$  的二根，則  $rs$  等於下列何者？

(A)  $pq$  (B)  $\frac{1}{pq}$  (C)  $\frac{p}{q^2}$  (D)  $\frac{q}{p^2}$

5. 已知三角形  $ABC$  的面積為 10，且  $D, E, F$  分別為邊  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  及  $\overline{AB}$  上的點，此三點都

異於  $A$  點，使得  $\overline{BD} = 2$ ,  $\overline{DC} = 3$ ，如圖所示。如果  $\triangle BCE$  的面積等於四邊形  $DCEF$  的面積，試問  $\triangle BCE$  的面積為何？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D)  $\frac{5}{3}\sqrt{10}$



6. 試問方程式  $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$  共有多少個整數解  $x$ ？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 試問子空間  $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$  的維度(dimension)為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

8. 已知  $a, b, x, y, z$  皆為非負整數，試問共有多少組解  $(a, b, x, y, z)$  滿足方程式  $a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ？

(A) 20 (B) 21 (C) 65 (D) 121

9. 試問  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$  之值為下列何者？

(A) -2 (B) 1 (C) 2 (D) 不存在

10. 已知實數  $a, b, c$  滿足條件  $a = \sqrt{2} + b$ ，且  $2ab + 2\sqrt{2}c^2 + 1 = 0$ ，試問下列何者不正確？

(A)  $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  (B)  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $a + b + c = 0$

11. 已知  $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ,  $w = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ，其中  $i^2 = -1$ ，試問下列何者不正確？  
 (A)  $z^5 + w^5 = -1$  (B)  $z^7 + w^7 = -1$  (C)  $z^9 + w^9 = -1$  (D)  $z^{11} + w^{11} = -1$
12. 已知  $n = 1 + 5 \times 69 + 10 \times 69^2 + 10 \times 69^3 + 5 \times 69^4 + 69^5$ ，試問  $n$  的正因數共有多少個？  
 (A) 3 (B) 69 (C) 125 (D) 216
13. 已知正數  $a, b$  滿足條件  $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b)$ ，則  $\frac{b}{a}$  之值為何？  
 (A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$  (C)  $\frac{8}{5}$  (D)  $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
14. 試問共有多少組實數解數對  $(x, y)$  滿足方程組  $x + y + xy = 19$  與  $x^2 + y^2 = 25$ ？  
 (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
15. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 3\angle A$ ,  $\overline{AB} = 48$ ,  $\overline{BC} = 27$ ，則  $\overline{AC} = ?$   
 (A) 33 (B) 35 (C) 37 (D) 39
16. 化簡  $4\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{97-56\sqrt{3}}$  之值為下列何者？  
 (A) 3 (B) 4 (C)  $6-3\sqrt{3}$  (D)  $5-2\sqrt{3}$
17. 試問  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{3\pi}{n}}{n} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n} \right)$  之值為下列何者？  
 (A) 1 (B) 2 (C)  $\frac{1}{\pi}$  (D)  $\frac{2}{\pi}$
18. 如果  $y = f(x)$  為微分方程式  $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)$  的解，且滿足條件  $f(0) = \frac{3}{2}$ ，則  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  之值為何？  
 (A) 1 (B)  $\frac{3}{2}$  (C) 2 (D) 3
19. 以下矩陣都是  $n$  階方陣，下列何者為正確？  
 (A) 如果  $\mathbf{AB} = \mathbf{CB}$ ，且  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ ，則  $\mathbf{A} = \mathbf{C}$   
 (B) 如果  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ ，則  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  或  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  (其中  $\mathbf{I}$  為單位矩陣)  
 (C)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$   
 (D) 如果  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ ，則  $\mathbf{A}$  的轉置矩陣  $\mathbf{A}^T$  必為可逆。
20. 設  $[x]$  表示不大於  $x$  的最大整數，例如： $[0.9] = 0$  及  $[1.6] = 1$ ， $[\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \cdots + [\log_2 256]$  之值為何？  
 (A) 36 (B) 650 (C) 1538 (D) 1546
21. 設  $n$  為正整數，如果  $n^3 - 14n^2 + 64n - 93$  為一質數，試問滿足這樣條件的所有可能  $n$  值共有多少個？  
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
22. 試問滿足方程式  $(x^2 + y^2 - 4)^2 (xy - 1)^2 + \sqrt{y^2 - x^2} = 0$  共有幾組實數解  $(x, y)$ ？  
 (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10
23. 設  $x, y$  為實數，如果  $x, y$  滿足條件  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ ，則  $\frac{y}{x}$  之最大值為何？  
 (A)  $2+\sqrt{3}$  (B)  $3+2\sqrt{2}$  (C)  $3\sqrt{3}$  (D) 6

24. 設  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ，下列何者為正確？

- (A)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$  (B)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$   
 (C)  $f(x, y)$  在點  $(0, 0)$  處不連續 (D) 函數  $f$  在  $(0, 0)$  處不可微分

25. 已知函數  $f$  的定義域為所有正整數，且滿足條件  $f(1) = 2013$  及對於任意正整數  $n > 1$ ，

$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$  成立，試問  $f(2012)$  之值為何？

- (A)  $\frac{1}{2012}$  (B)  $\frac{1}{1006}$  (C)  $\frac{2012}{2013}$  (D) 2012

26.  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx =$  (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$  (D)  $\sqrt{\pi}$

27.  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 2; x, y \geq 0\}$ ； $\iint_{\Omega} e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy =$

- (A)  $\frac{1}{e} - e$  (B)  $-\frac{1}{e}$  (C)  $e + \frac{1}{e}$  (D)  $e - \frac{1}{e}$

28.  $\Gamma = \{z(\theta) : z(\theta) = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$ ， $a$  為任意實數，則  $\int_{\Gamma} \frac{e^{az}}{z} dz =$

- (A)  $\pi i$  (B)  $-\pi i$  (C)  $2\pi i$  (D)  $-2\pi i$

29.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x - 4} =$  (A)  $\frac{-1}{16}$  (B)  $\frac{1}{16}$  (C)  $\frac{-1}{8}$  (D)  $\frac{1}{7}$

30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) =$  (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$  (D)  $\sqrt{\pi}$

31.  $[\cdot]$  是高斯函數， $\lim_{x \rightarrow 3} [x - [x]] =$  (A) 0 (B) -1 (C) 3 (D) 2

32.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 7\theta}{\sin 3\theta} =$  (A) 7 (B) 3 (C)  $\frac{3}{7}$  (D)  $\frac{7}{3}$

33.  $f(x) = \begin{cases} x^6, & x \in \mathcal{Q} \\ x^2, & x \notin \mathcal{Q} \end{cases}$ ； $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$  (A) 1 (B) 0 (C)  $\frac{3}{7}$  (D)  $\frac{7}{3}$

34. 若  $h(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - x - a + 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$  在  $x = 1$  處連續，則  $a =$  (A) 3 (B) 0 (C) 1 (D)  $\frac{7}{3}$

35. 若  $f'(k)$  存在，則  $\lim_{x \rightarrow k} \frac{xf(k) + -kf(x)}{x - k} =$

- (A)  $f(k) + kf'(k)$  (B) 0 (C)  $kf'(k) - f(k)$  (D)  $f(k) - kf'(k)$

36.  $[\cdot]$  是高斯函數，則  $g(x) = x[x]$  在  $x = 1$  (A) 可微 (B) 不可微 (C) 不連續 (D) 以上皆非

37.  $\int \frac{3^{\ln x}}{x} dx =$  (A)  $\frac{1}{3} 3^x + c$  (B)  $\frac{1}{\ln 3} 3^{\ln x} + c$  (C)  $\frac{1}{3} 3^{\ln x} + c$  (D)  $\frac{1}{\ln 3} 3^x + c$

38.  $\int \sin^{-1} x dx =$  (A)  $x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + c$  (B)  $x \sin^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + c$  (C)  $x \cos^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + c$

(D)  $x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + c$

39.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  是 (A) 發散 (B) 絕對收斂 (C) 條件收斂 (D) 以上皆非
40. 瑕積分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  是 (A) 發散 (B) 收斂到  $\frac{\pi}{2}$  (C) 收斂到  $\frac{\pi}{4}$  (D) 以上皆非
41.  $H$  是  $G$  的正規子群 (normal subgroup),  $H$ 、 $G$  的 order 分別是 3、21, 請問商群 (factor group or quotient group)  $G/H$  的 order 是多少? (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
42. 設  $k \in R$ , 對任意  $x \geq 0$ , 恆有  $x^3 - 2x^2 - 4x + k > 0$ ,  $k$  的範圍是  
(A)  $7 < k$  (B)  $8 < k \leq 9$  (C)  $7 < k \leq 8$  (D)  $8 < k$
43. 球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 1 = 0$  與直線  $L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$  交於  $A, B$  二點,  $\overline{AB}$  線段長 = (A)  $\frac{\sqrt{13}}{3}$  (B)  $\frac{1}{3\sqrt{13}}$  (C)  $\frac{\sqrt{7}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
44.  $L_1: \begin{cases} x=12+t \\ y=11-3t \end{cases}, t \in R; L_2: \begin{cases} x=-3+4t \\ y=1-t \end{cases}, t \in R$  兩直線之交點為  
(A) (16, -5) (B) (17, -4) (C) (18, -6) (D) (17, -6)
45. 方程組  $\begin{cases} 5x+3y-z=0 \\ 2x+y+3z=a \\ x+4y+bz=17 \end{cases}$  有無限多組解, 則  $a+b=$  (A) -56 (B) -57 (C) -58 (D) -59
46.  $x+y+z=7$ 、 $y=z$  兩平面之夾角是 (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{5}$
47. 過  $P(1, -3, -5)$ 、 $P(2, 1, 7)$  兩點之直線的對稱式為 (A)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+5}{12}$   
(B)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+5}{1}$  (C)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{12}$  (D)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{12}$
48. 若  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  為任意三角形之三個內角, 則  $\begin{vmatrix} \tan \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \tan \beta & 1 \\ 1 & 1 & \tan \gamma \end{vmatrix} =$  (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
49. 點  $P(1, -1)$  到直線  $3x+4y=7$  的距離是 (A)  $\frac{4}{5}$  (B) 1 (C)  $\frac{6}{5}$  (D)  $\frac{8}{5}$
50.  $x, y \in R$  且  $x^2 + y^2 = 16$ , 則  $3x-4y$  的最大值為 (A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20