

1. 將  $4^{17}5^{25}$  乘開後是多少位數？

- (A) 27
- (B) 28
- (C) 29
- (D) 30

2. 有一邊長為 2 的正方形，今將此正方形截去四個大小相同的角後，變成正八邊形，則此正八邊形的邊長為多少？

- (A)  $\sqrt{2} - 1$
- (B)  $2 - \sqrt{2}$
- (C)  $\sqrt{2}$
- (D)  $2\sqrt{2} - 2$

3. 設  $\{a_n\}$  為一等差數列，已知它的第 5 項  $a_5 = 88$ ，第 8 項為  $a_8 = 79$ ，則使  $a_n$  為負數的最小正整數  $n$  值為多少？

- (A) 35
- (B) 36
- (C) 37
- (D) 38

4. 已知  $a, b$  為實數，且  $a \neq 0$ ，如果一多項式  $f(x)$  除以  $ax + b$ ，得商  $q(x)$ ，餘式為  $r$ ，試問下列何者正確的？

- (A)  $f(x)$  除以  $x + \frac{b}{a}$ ，得商  $q(x)$ ，餘式為  $r$
- (B)  $xf(x)$  除以  $ax + b$ ，得商  $xq(x) - \frac{r}{a}$ ，餘式為  $\frac{br}{a}$
- (C)  $xf(x)$  除以  $ax + b$ ，得商  $xq(x) + \frac{r}{a}$ ，餘式為  $-\frac{br}{a}$
- (D)  $x^2f(x)$  除以  $ax + b$ ，得商  $x^2q(x) + \frac{r}{a}x - \frac{br}{a^2}$ ，餘式為  $-\frac{b^2r}{a^2}$

5. 設多項式  $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$ ，則  $f(-\frac{1+i}{\sqrt{2}})$  之值為下列何者？

- (A) 1
- (B) i
- (C) -i
- (D) -1

6. 已知  $x + \frac{1}{x} = 3$ ，則  $x^7 + \frac{1}{x^7}$  之值為多少？

- (A) 843
- (B) 844
- (C) 845
- (D) 846

7. 已知  $m, n$  為正整數，如果  $m^2 - n^2 = 120$ ，則滿足這樣條件的所有可能數對  $(m, n)$  共有幾組？

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7

8. 化簡  $\sqrt{64 + 32\sqrt{3}} - \sqrt{97 + 56\sqrt{3}}$  之值為下列何者？

- (A) -3
- (B) -4
- (C) -5
- (D) -6

9. 設  $n$  為整數，如果  $\frac{4n}{n^2 + n + 2}$  為整數，則滿足這樣條件的  $n$  值共有多少個？

- (A) 1
- (B) 3
- (C) 5
- (D) 6

10. 令  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，則  $A$  的核空間(null space) $N(A)$ 之維度(dimension)為何？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

11. 已知一個七位數  $23ab421$  是 99 的倍數，其中  $a, b$  為  $0, 1, 2, \dots, 9$  中的數字，則  $b$  值為下列何者？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

12. 試問無窮級數  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)} + \cdots$

之值為下列何者？

- (A)  $\frac{1}{2}$
- (B)  $\frac{3}{4}$
- (C) 1
- (D)  $\frac{3}{2}$

13. 已知一多項式  $f(x) = x^{2014}(x^2 + ax + b)$ ，其中  $a, b$  為實數，如果將  $f(x)$  除以  $(x-2)^2$ ，得到餘式為  $2^{2014}(x-2)$ ，則  $b = ?$

- (A) -3
- (B) -2
- (C) 2
- (D) 3

14. 設  $a, b$  為實數，如果方程式  $x^3 + ax + b = 0$  之一複數根為  $1+i$ ，則  $a = ?$

- (A) -4
- (B) -2
- (C) 2
- (D) 4

15. 試問方程式  $\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x = 2$  之實數解  $x$  為下列何者？

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 16
- (D) 32

16. 試問  $\int_2^{2+\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| dx = ?$

- (A) -1
- (B)  $-\frac{1}{2}$
- (C) 0
- (D) 1

17. 令  $a = 3 - \sqrt{5}$ ,  $b = \sqrt{5} - 2$  及  $c = 5 - 2\sqrt{5}$ , 則此三數由小而大的排列順序為下列何者?

- (A)  $a < c < b$
- (B)  $a < b < c$
- (C)  $b < a < c$
- (D)  $b < c < a$

18. 試問  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$

- (A) 0
- (B)  $\frac{\pi}{2}$
- (C)  $\pi$
- (D) 發散

19. 設  $a, b, c$  為正實數, 如果  $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ , 試問  $\frac{c}{a+b}$  的最小值為多少?

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C)  $\frac{1}{2}$
- (D) 1

20. 設  $n$  為正整數, 如果二次函數  $y = 8^n x^2 - 2^n(2^n + 1)x + 1$  的圖形與  $x$  軸交於二點  $A_n$ 、 $B_n$ ,

令線段  $\overline{A_n B_n}$  之長為  $L_n$ , 則  $\sum_{n=1}^{\infty} L_n = ?$

- (A)  $\frac{2}{3}$
- (B)  $\frac{3}{4}$
- (C) 1
- (D)  $\frac{4}{3}$

21. 下列哪一個選項是正確?

- (A)  $5^{56} < 31^{28} < 17^{35} < 10^{51}$
- (B)  $5^{56} < 17^{35} < 10^{51} < 31^{28}$
- (C)  $5^{56} < 10^{51} < 17^{35} < 31^{28}$
- (D)  $17^{35} < 5^{56} < 10^{51} < 31^{28}$

22. 二平面  $x+2y-3z+3=0$  與  $-x-2y+3z=10$  之間的距離為下列何者？

- (A)  $\frac{7}{\sqrt{14}}$
- (B)  $\frac{13}{\sqrt{14}}$
- (C)  $\frac{7}{3}$
- (D)  $\frac{7}{2}$

23. 試問  $\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ$  之值為下列何者？

- (A)  $\frac{1}{2}$
- (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D)  $\sqrt{3}$

24. 試問  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = ?$

- (A) 0
- (B)  $\frac{1}{2}$
- (C) 1
- (D) 2

25. 試問下列何者恆為正確？

(A) 已知  $V$  為  $\mathbb{R}^n$  的子空間(subspace)，如果  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  且  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

為線性獨立(linearly independent)，則  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  必為  $V$  的一組基底(basis)。

(B) 令  $V = \text{Span}(\{(1,0,2,3), (0,1,1,1), (1,1,4,4), (2,-2,1,2)\})$ ，則  $\dim V = 4$ 。

(C) 已知  $V$  與  $W$  皆為  $\mathbb{R}^n$  的子空間，如果  $\dim V = \dim W$ ，則  $V = W$ 。

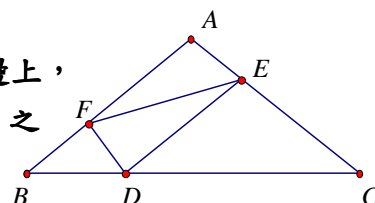
(D) 已知  $A$  為  $n$  階方陣，如果  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  為  $\mathbb{R}^n$  的一組基底，則  $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_n\}$  亦為  $\mathbb{R}^n$  的一組基底。

26. 下列何者是錯誤的？

- (A) 如果  $A$  為  $m \times n$  階矩陣，則  $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$ ，其中  $A^T$  表示  $A$  的轉置矩陣(transpose)  
 (B) 已知  $A$ 、 $B$  為矩陣使得  $AB$  有意義，則  $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ 。  
 (C) 已知  $A$ 、 $B$  為矩陣使得  $AB$  有意義，則  $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(B)$ 。

(D)  $\text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$ 。

27.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點分別在  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$  三邊上，使得  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，又  $\triangle BDF$  之面積為 9， $\triangle AFE$  之面積為 15， $\triangle DCE$  之面積為 32，則  $\triangle DEF$  與  $\triangle ABC$  面積之比值為下列何者？



- (A)  $\frac{2}{9}$   
 (B)  $\frac{1}{4}$   
 (C)  $\frac{1}{3}$   
 (D)  $\frac{3}{8}$

28. 已知  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = 1$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - f(x^2)}{x - 1} = ?$

- (A) 1  
 (B) 4  
 (C) 5  
 (D) 6

29. 已知  $a$  為實數，令  $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + ax + 1$ ，如果  $f(a) = a$  為  $f(x)$  之極小值，則  $a$  值為多少？

- (A)  $-\frac{1}{4}$   
 (B) 0  
 (C)  $\frac{1}{4}$   
 (D) 1

30. 行列式  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -5 & 2 \\ 4 & -4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = ?$

- (A) -32  
(B) 0  
(C) 32  
(D) 48

31. 已知實數  $a, b$  滿足條件  $a - b = 4$  及  $a^3 - b^3 = 28$ ，則  $ab$  之值為多少？

- (A) -3  
(B) -1  
(C) 1  
(D) 3

32. 已知  $A$  為  $n$  階方陣，下列有關  $A$  為可逆矩陣的性質是錯誤的？

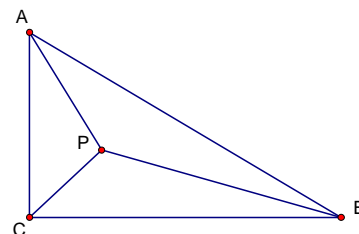
- (A) 齊次線性方程組  $Ax = 0$  只有一組解  $x = 0$ 。  
(B) 對任意  $b \in \mathbb{R}^n$ ，則方程組  $Ax = b$  恆有解。  
(C)  $\text{rank}(A) < n$ 。  
(D)  $\det(A) \neq 0$ 。

33. 下列何者錯誤？

- (A) 數列  $\{\frac{\ln n}{n}\}$  為收斂數列。  
(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$  為發散級數。  
(C) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則級數  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  必收斂。  
(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$  為收斂級數。

34. 直角  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $P$  為  $\triangle ABC$  內部一點，使得

$\angle APB = \angle APC = \angle CPB$ ，且  $\overline{PA} = 8, \overline{PC} = 6$ ，如圖所示，則  $\overline{PB} = ?$



- (A) 16  
(B) 32  
(C) 48  
(D) 60

35. 試問  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}} \right] = ?$

(A)  $2(\sqrt{2}-1)$

(B)  $\sqrt{2}$

(C)  $2\sqrt{2}$

(D)  $2(\sqrt{2}+1)$

36. 試問  $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = ?$

(A)  $\frac{\pi}{4}$

(B)  $\frac{\pi}{2}$

(C)  $\pi$

(D)  $\frac{\pi^2}{4}$

37. 令  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 4 \\ ax+b, & x > 4 \end{cases}$  其中  $a, b$  為實數，如果  $f'(4)$  存在，則  $a+b$  之值為何？

(A)  $-16$

(B)  $-8$

(C)  $8$

(D)  $16$

38. 已知  $a = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \square^n$  且  $b = (1, 2, 3, \dots, n) \in \square^n$ ，如果  $\theta_n$  為二向量  $a$  與  $b$  的夾角，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = ?$

(A)  $\frac{\pi}{6}$

(B)  $\frac{\pi}{4}$

(C)  $\frac{\pi}{3}$

(D)  $\frac{\pi}{2}$



39. 設  $n$  為正整數，如果乘積  $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{n})$  為整數，則  $n$  恆滿足下列何者？

- (A)  $n$  為奇數
- (B)  $n$  為偶數
- (C)  $n$  為 3 的倍數
- (D)  $n$  為任意正整數

40. 試問滿足方程式  $x^3 - y^3 = 7(x - y)$  和  $x^3 + y^3 = 5(x + y)$  之所有實數數對解  $(x, y)$  共有幾組解？

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7

41. 試問  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+x^2} dx = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C)  $\sqrt{5}$
- (D)  $2\sqrt{2}$

42. 設  $p, q$  為質數，試問滿足方程式  $x^2 - (6p - 4q)x + 3pq = 0$  有二個整數解的所有可能數對  $(p, q)$  共有幾組？

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6

43. 設  $a, b, c$  為正整數，如果  $a$  為 15 的倍數， $b$  為 12 的倍數及  $c$  為 21 的倍數，則下列何者恆正確？

- (A)  $(a+b+c)^2$  必為 9 的倍數
- (B)  $a+b+c$  必為 9 的倍數
- (C)  $a+b+c$  必為 2 的倍數
- (D)  $a^2+b^2+c^2$  必為 18 的倍數

44. 設  $a$  為非負實數，如果一元二次方程式  $x^2 + ax + a + 1 = 0$  至少有一實數解，則滿足這樣條件的最小  $a$  值為下列何者？

(A)  $2\sqrt{2} - 2$

(B)  $2\sqrt{2} + 2$

(C)  $3\sqrt{2} - 3$

(D)  $3\sqrt{2} + 3$

45. 試問  $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx = ?$

(A) -2

(B) -1

(C) 1

(D) 2

46. 試問  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{\pi}{n} \right)^n = ?$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 不存在

47. 在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且  $\angle A = 108^\circ$ ，則  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$  之比值為何？

(A)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(B)  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(C)  $\frac{3}{2}$

(D)  $\frac{4}{3}$

48. 設  $n$  為正整數，如果一個  $n$  位數的  $n$  個數字正好是  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  的一個排列且數字不得重複，而且對所有  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ，此數的前面  $k$  個數字所組成的  $k$  位數是  $k$  的倍數，我們稱滿足這樣條件的  $n$  位數是一個「好數」；例如 321 是一個三位好數，那麼所有六位數中共有多少個「好數」？

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 8

49. 下列哪一個矩陣不能對角化？

(A)  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(B)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(C)  $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(D)  $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

50. 下列何者恆為錯誤？

(A) 設 A、B 都是  $n$  階方陣，如果 A、B 為相似(similar)矩陣，則 A、B 的特徵多項式必相等。

(B) 設 A 為  $n$  階方陣，則 A 和它的轉置矩陣  $A^T$  具有相同的特徵根。

(C) 設 A 為  $n$  階方陣，則 A 和它的轉置矩陣  $A^T$  具有相同的特徵向量。

(D) 設 A、B 都是  $n$  階方陣，則  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 。