

**國立臺中文華高級中學 102 學年度第一次教師甄選
數學科專業知能試題本**

測驗說明：

1. 本試題分填充題(80 分)及計算證明題(20 分)；填充題分二部分，第一部分每格 4 分，第二部分每格 6 分，皆不需計算過程；計算證明題，需詳列計算過程或說明理由。
2. 另附五張 A4 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙左上角請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

一、 填充題：(請將正確的答案填入正確的題格中，分式需化至最簡，根式需有理化，否則不予計分，不需計算過程)

第一部分：(每格 4 分)

1. 設 x, y, z 均為實數，且 $x - y = 2 + \sqrt{3}$ ， $x - z = 2 - \sqrt{3}$ ，則 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$
= _____。
2. 求下列的級數和：
 $1 \times 2 + (1 \times 2 + 2 \times 3) + (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4) + \dots + (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (n-1) \times n) =$ _____。
3. 坐標平面中， $A(3, 6)$ 、 $B(5, 10)$ 、 $C(8, 12)$ 、 $D(4, 6)$ ，若 M 為 \overline{AB} 中點， N 在 \overline{CD} 上，
 \overline{MN} 將四邊形 $ABCD$ 的面積分為兩等分，求 N 點坐標為_____。
4. 已知三事件 A, B, C 為獨立事件且 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(C) = \frac{1}{4}$ ，求 $P(A \cup B \cup C) =$
_____。
5. 若正整數 x, y, z 的最小公倍數為 360，且 $a = x \cdot 10^6 + y \cdot 10^3 + z$ ，則 a 的可能值有_____個。
6. 由 1, 2, 3, ..., 20 挑出 x_1, x_2, x_3 三個數字，且 $x_1 < x_2 < x_3$ 。求 x_1 與 x_2 至少差 3， x_2 與 x_3 至少差 5 的機率為_____。
7. 設 A, B, C, D, E 表示 $z^5 = i$ 之五根在複數平面上的對應點，若點 P 為 $1+i$ 在複數平面上的對應點，則 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PD} \cdot \overline{PE}$ 之值為_____。
8. 已知甲袋中有 1 黑球 2 白球，乙袋中有 1 白球 2 黑球，設每一球被取到之機會均相同，今同時從甲袋及乙袋中各取 1 球互相交換，此叫做一回合，試求長期操作後，當達穩定狀態時，甲袋中為 3 白球之機率為_____。

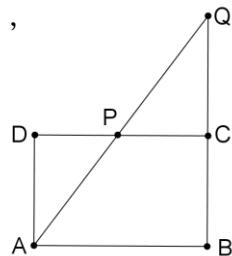
第二部分：(每格 6 分)

9. 設 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = C_3^{n+2} + n^3 + 2n^2 + n + 2$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} =$ _____。

10. 如右圖，矩形 $ABCD$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 1$ ，若過 A 點作一直線交 \overline{CD} 於 P ，

且與 \overline{BC} 邊的延長線交於 Q ，若使 $\triangle ADP$ 與 $\triangle CPQ$ 的面積和為最小，

求此時 \overline{DP} 的長度為_____。



11. 設 $f(a, b) = (61 - a - 28b)^2 + (62 - a - 29b)^2 + (60 - a - 30b)^2 + (58 - a - 31b)^2 + (59 - a - 32b)^2$ ，

當 $f(a, b)$ 有最小值時，求此時數對 $(a, b) =$ _____。

12. 將 63, 91, 129 三數除以某一自然數後，所得的三個餘數和為 25，則此自然數為_____。

13. 設函數 $y = f(x) = \frac{(x-1)^2}{2-x}$ ，求 $\frac{f^{(7)}(1)}{f^{(5)}(1)} =$ _____

【註： $f^{(n)}(a)$ 表示在 $x=a$ 處的 n 階導數】

14. 坐標空間中，點 $A(6, 3, 4)$ ，點 $B(4, 8, 3)$ ，點 P 為 x 軸上任一點，點 Q 為 y 軸上任一點，

求 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 最小值_____。

15. 雅妮參加擲骰子比賽，遊戲規則如下：每次投擲二顆相同的公正骰子，

(1) 若擲出點數和為 7 點，可得獎金 100 元，並可以繼續投擲；

若再擲出點數和為 7 點，則再得 100 元，並可以繼續投擲，以此類推，

(2) 若擲出點數和不是 7 點，則得 30 元，並結束比賽。

則雅妮參賽的獎金期望值為_____。

16. 設 $f(x) = \frac{\prod_{k=0}^{50} (x-2k)}{\prod_{k=1}^{50} (x+k)}$ ，求 $\log_2 f'(0)$ 值=_____。