

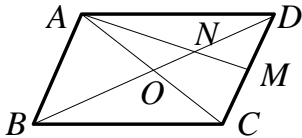
103 學年度中區縣市政府教師甄選策略聯盟

國中數學科試題

選擇題（每題 2 分，50 題，共 100 分）

1. A 廟和 B 廟擁有相同的 62 首籤詩，某甲分別在兩間廟各抽一支籤，試問某甲抽中的兩支籤剛好相同的機率為何？
① $\frac{1}{62^2}$ ② $\frac{1}{62 \times 61}$ ③ $\frac{61}{62^2}$ ④ $\frac{1}{62}$
2. 從一個 10 人的俱樂部，選出一位代表，一位幹事和一位會計，且均由不同人擔任，如果 10 人中 A 君和 B 君不能同時被選上，那麼總共有幾種選法？
① 672 ② 612 ③ 576 ④ 834
3. 將紅、黃、藍、綠 4 顆球全部分給大雄、小夫、胖虎三人，已知胖虎至少分得 1 顆球，求共有多少種分法？
① 32 ② 65 ③ 81 ④ 108
4. 從 $1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^9$ 這 10 個數中任選 5 個相異的數字相加，所得的總和共有幾種可能值？
① 10^5 ② 5^{10} ③ $\frac{10!}{(5!)^2}$ ④ $\frac{10!}{5!}$
5. 袋中有 3 個不同紅球，5 個不同白球，今自袋中隨機取球，一次取一球，取後放回，共取兩次，恰為一紅球一白球的機率為何？
① $\frac{15}{64}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{15}{56}$ ④ $\frac{15}{28}$
6. 設 A、B、C 為同一樣本空間中的三事件，且樣本空間的元素個數為有限個，則下列敘述何者正確？
① 若 A、B 為獨立事件，且 $P(A \cap B) = P(A)$ ，則 A 必為空事件
② 若 A、B 為獨立事件，則 A 與 $A \cap B$ 亦獨立
③ 若 A、B 為互斥事件且 A、B 均不為空事件，則 A、B 必不為獨立事件
④ 若 A、B、C 兩兩互為獨立，則 A、B、C 三事件獨立
7. 有某種癌症檢驗方法，患癌症者經此方法檢驗出有癌症的機率為 0.9，沒患癌症者經此方法檢驗出有癌症的機率為 0.01；某地區人口中患有癌症者占 1%，今在此地區任選一人，經此方法檢驗出有癌症，則此人確有癌症的機率為何？
① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{2}{3}$
8. 已知袋子內一號球有 1 個，二號球有 2 個，...，十號球有 10 個，自袋中任取出一球，若取出 n 號球則可得 n 元，則任取一球的期望值為何？
① 5.5 元 ② 7 元 ③ 6.5 元 ④ 8 元
9. 方程式 $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ 圖形所圍區域的面積為何？
① $\pi + 2$ ② $\pi + 3$ ③ $\pi + 4$ ④ $\pi + \frac{3}{2}$
10. 連擲一公正骰子三次，第一次出現 x 點，第二次出現 y 點，第三次出現 z 點，則滿足 $x + y + z \leq 8$ 的機率為
① $\frac{13}{54}$ ② $\frac{7}{27}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{8}{27}$
11. 已知 47^{50} 是 84 位數，則 47^{20} 的位數為？
① 34 ② 35 ③ 36 ④ 37
12. 循環小數 $0.\bar{9} = 0.9999\dots$ 和整數 1 之間的關係下列何者正確？
① $0.\bar{9}$ 不存在 ② 無從比較大小 ③ $0.\bar{9}$ 約略小於 1 ④ $0.\bar{9} = 1$
13. 下列何者不是 9 的倍數？
① $1004^3 + 888^3$ ② $1004^3 + 1$ ③ 704254698 ④ 15^{13}
14. 某研究機構發表全球平板電腦的產值預測，未來四年的成長率依序為 80%、50%、0%、20%。依此數據，請問未來四年的「平均成長率」最接近下列那一個選項？
① 25% ② 30% ③ 34% ④ 38%
15. 滿足 $x^3 + y^3 = z^3$ 的正整數解 (x, y, z) 共有多少組？
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 無限多組
16. 滿足 $172x + 20y = 1000$ 的正整數序對 (x, y) 有多少組？
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

17. 已知八位數 $273x49y5$ 是 495 的倍數，求 $x+y$ 的值。
 ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16
18. 已知 z 為複數且 $z + \frac{1}{z} = 1$ ，求 $z^{101} + \frac{1}{z^{101}}$ 之值。
 ① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\sqrt{-1}$
19. 設 m 和 n 均為自然數，已知 m 除以 24 餘數為 20， n 除以 36 餘數為 33，則 $m^2 n^3$ 除以 6 之餘數為
 ① 0 ② 2 ③ 3 ④ 4
20. 下面是甲乙丙丁 4 人的敘述：
 甲： $\sqrt{7} - \sqrt{5} > \sqrt{5} - \sqrt{3}$ 乙： $7 < \sqrt{74} - \sqrt{47} < 8$ 丙： $4+3i > 3+2i$ 丁：853 是質數
 請問有幾個人敘述正確？
 ① 1 人 ② 2 人 ③ 3 人 ④ 4 人
21. 在三位數中，各位數字相加總和為 25 的共有幾個？
 ① 4 個 ② 6 個 ③ 8 個 ④ 10 個
22. 在 2^{10} 與 2^{11} 之間的 3 的倍數共有多少個？
 ① 339 個 ② 340 個 ③ 341 個 ④ 342 個
23. 二次多項式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其函數圖形 $y = f(x)$ 通過三點 $(1, -4)$ ， $(2, 3)$ 和 $(-2, 1)$ ，則 $a = ?$
 ① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{20}{3}$ ④ 1
24. 設 x, y 為實數，且滿足 $23^x = 9$ ， $207^y = 243$ ，試求 $(x+1)(2y-5) = ?$
 ① -1 ② -3 ③ -5 ④ -7
25. 多項式 $p(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 1$ 有 3 個相異實數根，則實係數 a 必須滿足：
 ① $1 < a < 3$ ② $a < 3$ ③ $1 < a$ ④ $1 \leq a \leq 3$
26. 設 $x > 0, y > 0$ ，則 $(x+y)\left(\frac{4}{x} + \frac{9}{y}\right)$ 最小值為？
 ① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27
27. 設函數 $f(x) = \frac{2\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ ，其最大值為 a ，最小值為 b ，則 $a+b = ?$
 ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1
28. 滿足 $|x+1| + |x-2| = \frac{8}{3}$ 的實數 x 有多少個？
 ① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0
29. 設 $f(x) = (a+1)x^2 + (b-1)x + c$ ，已知 $f(-3) = f(2) = f(9) = 4$ ，則 $a+b+c = ?$
 ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4
30. 已知 n 為正整數且 $\phi(n)$ 代表不大於 n 且與 n 互質的正整數個數(其中 $\phi(1) = 1$)，則下列敘述何者錯誤？
 ① 若 n 為質數，則 $\phi(n) = n-1$ ② 若 $\phi(n) = n-1$ ，則 n 必為質數
 ③ 若 n 為奇數，則 $\phi(2n) = \phi(n)$ ④ 若 $\phi(n+2) = \phi(n) + 2$ ，則 n 必為質數
31. 求函數 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 的最大值
 ① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2
32. 設 x, y 為實數，且已知 $3x+4y = -2$ 。試求 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3$ 的最小值
 ① 2 ② $\frac{16}{25}$ ③ $-\frac{34}{25}$ ④ -2
33. 試求滿足聯立方程組 $\begin{cases} ab+bc=44 \\ ac+bc=23 \end{cases}$ 的正整數序對 (a, b, c) 共有幾組？
 ① 0 組 ② 1 組 ③ 2 組 ④ 4 組
34. 若 $\begin{vmatrix} -2-x & 2 & -3 \\ 2 & 1-x & -6 \\ -1 & -2 & -x \end{vmatrix} = -(x-a)^2(x-b)$ ，則 $b-2a = ?$
 ① -1 ② -7 ③ 11 ④ 13
35. 設 $f(x) = \frac{1}{1 - \frac{5}{5 + \frac{1}{x}}}$ ， $x > 0$ ，則 $f(37.9) - f(24.7) = ?$
 ① 66 ② 67.2 ③ 68 ④ 69.7

36. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$, 則矩陣 A 之秩 $\text{rank}(A) = ?$
- ①1 ②2 ③3 ④4
37. 已知 $f(x)$ 為實係數三次多項式，若 $f(0) = -8$, $f(1) = 2$ 且 $f(2-i) = 2$, 則多項式 $f(x) - 2x + 3$ 除以 $x-4$ 的餘式為
- ①19 ②23 ③27 ④35
38. 設 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別是 $A(-1,5)$, $B(2,3)$ 和 $C(-1,-7)$, 則 $\triangle ABC$ 的面積為?
- ①15 ②16 ③17 ④18
39. 求點 $(0,2)$ 與圖形 $y = 4 - x^2$ 最近距離為?
- ① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{8}}{2}$
40. 某人在 A 處看到建築物 C 在北 60° 東，另一建築物 D 在其北 30° 東。此人向北前進 2 公里至 B 處，見 C 在其正東方，D 在其東 60° 南，則 $\overline{AD} = ?$
- ① $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 公里 ② $\frac{2}{\sqrt{2}}$ 公里 ③ 2 公里 ④ $\sqrt{10}$ 公里
41. 在二維平面上，設 $A(-1, 5)$ 、 $B(2, 7)$, 則滿足 $2\overline{PA} = 3\overline{PB}$ 之 P 點軌跡為何?
- ①直線 ②橢圓 ③拋物線 ④圓
42. 在坐標平面上，三直線 $L_1: x-2y+4=0$ 、 $L_2: 2x-y-2=0$ 、 $L_3: 2x+y+4=0$ 所圍成的三角形內心的 x 坐標為何?
- ① $\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{1}{6}$
43. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A + 2\cos B = 2$ 及 $2\sin B + \cos A = \sqrt{3}$ 且 $\angle C$ 為銳角，試問 $\angle C$ 的度數為何?
- ① 30° ② 45° ③ 60° ④ 75°
44. 空間中兩直線 $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-4}{4}$ 與 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-8}{2}$ 的相交情形為何?
- ①交於一點 ②平行 ③重合 ④歪斜
45. 已知空間中的三點 $O(0,0,0)$ 、 $A(4,1,1)$ 、 $B(2,1,0)$, 由向量 \vec{OA} 及 \vec{OB} 所圍成的平行四邊形面積為何?
- ① 0 ② 3 ③ 9 ④ $3\sqrt{10}$
46. 以下關於群(group)的敘述(A)(B)(C)(D)哪些是正確的?
- (A)任意兩個元素個數皆為 3 的群(group)必定同構(isomorphic);
- (B)對於每一個正整數 n , 都存在至少一個交換群(abelian group), 其元素個素剛好是 n ;
- (C)若 H 和 K 是 G 的子群(subgroup), 則 $H \cup K$ 也是 G 的子群;
- (D)每一個元素個數大於 2 的循環群(cyclic group)至少會有兩個相異的生成元素(generator)。
- ①(A)(B) ②(A)(C) ③(B)(D) ④(A)(B)(D)
47. 設 a, b, c 是某三角形的三邊長，試求 $2\sqrt{(a-b-c)^2} - 4\sqrt{(b-c-a)^2} + 3\sqrt{(c-a-b)^2} = ?$
- ① $5a - 9b + 3c$ ② $-5a + 9b - 3c$ ③ $3a - 9b + 5c$ ④ $-3a + 9b - 5c$
48. 如下圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中， \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點， M 點是 \overline{CD} 的中點， \overline{AM} 和 \overline{BD} 相交於 N 點，則下列敘述何者正確?
- 
- ① $\overline{ON} : \overline{ND} = 1:1$ ② $\overline{DN} : \overline{NB} = 3:5$
- ③ $\triangle AND$ 面積：四邊形 $OCMN$ 面積 = 1:1 ④ $\triangle DMN$ 面積：四邊形 $ABCD$ 面積 = 1:8
49. 設 α 、 β 和 γ 表三角形三邊長，若 $100^\alpha + 100^\beta + 100^\gamma = 10^{\alpha+\beta} + 10^{\beta+\gamma} + 10^{\gamma+\alpha}$, 則此三角形必為
- ①直角三角形 ②正三角形 ③鈍角三角形 ④不能判斷
50. 設 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$, 則化簡 $\sqrt{1+\sin\theta} - \sqrt{1-\sin\theta}$ 可得
- ① $-2\sin\frac{\theta}{2}$ ② $2\sin\frac{\theta}{2}$ ③ $-2\cos\frac{\theta}{2}$ ④ $2\cos\frac{\theta}{2}$