

桃園縣 101 年國民中學新進教師甄選【專門科目：數學】試題卷

※注意事項： 1. 答案一律畫在答案卡上，如寫在試題卷上，不予計分。
2. 作答完畢，請將試題及答案卡一併交回。
3. 本試題共 2 頁。

單一選擇題：請依照題意，從四個選項中選出一個正確或最佳的答案（共 25 題，每題 4 分，合計 100 分）

1. 設 $S = 1^4 + 2^4 + \cdots + 1984^4 + 1985^4$ 的個位數為 a ，試求 a 之值為何？

- (A) 2 (B) 3
(C) 5 (D) 8

2. 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}$ ，求 $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^8$

- (A) $1 + \omega + \omega^2$ (B) ω
(C) -1 (D) $1 + \omega$

3. 方程式 $x^2 - y^2 = 101^2$ 的整數解有幾組？

- (A) 4 (B) 6
(C) 8 (D) 10

4. 已知 $2 + \sqrt{3}$ 是方程式 $x^2 - 9x \cos \theta + 1 = 0$ 的一個根，且

θ 是銳角，則 $\sin \frac{\theta}{2} = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{13}}{6}$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

5. 求 $\int_{-1}^0 x e^{-x} dx$

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) 1
(C) -1 (D) 2

6. 設 $f(x) = 10^{\tan x}$ ，則 $f'(\frac{\pi}{4})$ 的值為何？

- (A) 10 (B) 20
(C) $2 \ln 10$ (D) $20 \ln 10$

7. 若一函數 f ，恆滿足 $f(x) + 2f(1/x) = 3x$ ，試求 $f(2) + f(4)$ 之值為何？

- (A) $-\frac{5}{2}$ (B) $-\frac{7}{2}$
(C) $-\frac{9}{2}$ (D) $-\frac{11}{2}$

8. 方程組 $\begin{cases} 3x + 3y - z = 10 \\ 4x - y - 3z = m \\ nx - 4y - 2z = -5 \end{cases}$ 有無窮多解，求 $m - n$

- (A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 6

9. 在一正立方體的六個面上塗紅、橙、黃、綠、藍、紫各一次，請問有幾種不同的塗法？（註：正立方體可自由翻轉。）

- (A) 30 (B) 60
(C) 120 (D) 720

10. 若 a 、 b 、 c 為從集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中隨機取出的三個數字（可重複選取），試問 $ab + c$ 為奇數的機率為何？

- (A) $\frac{59}{125}$ (B) $\frac{62}{125}$
(C) $\frac{64}{125}$ (D) $\frac{66}{125}$

11. 下列何者不是 13 的倍數？

- (A) $64^{625} + 1$
(B) $2^{1000} - 3$
(C) $67^{33} + 5$
(D) $18^{50} + 1$

12. 設 $T(x, y) = (x, y - x, y)$ 為從 R^2 到 R^3 的線性轉換，試求 $\dim(\text{Image}(T))$

- (A) 2 (B) 1
(C) 3 (D) 以上皆非

13. $n \in N$ ， $a_n = \frac{1000^n}{n!}$ ，下列何者最大？

- (A) a_1 (B) a_{1000}
(C) a_{1024} (D) a_{2012}

14. 設區域 $R = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2\}$ ，求重積

分 $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dA = ?$

- (A) π
(B) $\frac{2\pi}{3}$
(C) $\frac{4\pi}{3}$
(D) $\frac{8\pi}{3}$

15. 曲線 $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ 與 $y = 0$ 所圍區域繞 x 軸旋轉，求該旋轉體體積

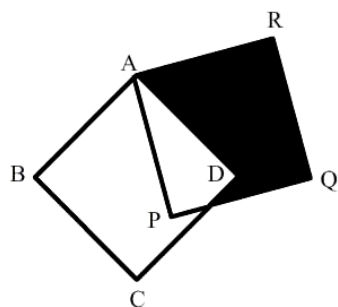
- Ⓐ $\frac{\pi^2}{2}$
 Ⓑ π^2
 Ⓒ $\frac{\pi^2}{3}$
 Ⓓ $\frac{\pi^2}{5}$

16. $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{10})^2$ 的展開式中， x^{10} 的係數為何？

- Ⓐ 10
 Ⓑ 16
 Ⓒ 20
 Ⓓ 25

17. 附圖是兩全等的正方形 $ABCD$ 與 $APQR$ 重疊情形，若 $\angle BAP = 60^\circ$, $\overline{AB} = 6\sqrt{3}$ ，則圖中灰色部分面積為何？

- Ⓐ 72
 Ⓑ $54\sqrt{3} - 18$
 Ⓒ $108 - 18\sqrt{3}$
 Ⓓ $108\sqrt{3} - 108$



18. 若 $2^x = 3^y = 12$ ，則 $xy - x - 2y + 3 = ?$

- Ⓐ 2
 Ⓑ 3
 Ⓒ 4
 Ⓓ 1

19. 某天小明家裡的時鐘沒電了，將其裝上電池後，顯示 12 點整；然後小明就出門到朋友家，一進門看到朋友家的時鐘是 13 點 20 分，待了一段時間後離開，這時朋友家的時鐘是指著 13 點 50 分，回到家時，家裡的時鐘指著 14 點整，這時小明若要將家裡的時鐘調整好，請問應要調整成幾時幾分？（假設來回的路程時間相同）

- Ⓐ 14 點 15 分 Ⓑ 14 點 25 分
 Ⓒ 14 點 35 分 Ⓓ 14 點 45 分

20. 令 $\lambda_1 = -1, \lambda_2, \lambda_3$ 為矩陣 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的三個特徵

值，求 $\lambda_2 \lambda_3 =$

- Ⓐ 0
 Ⓑ 4

- Ⓒ 3
 Ⓓ 1

21. $m, n \in N$ ，若 $C_n^m : C_{n+1}^m : C_{n+2}^m = 5:3:1$ ，則 m 為何？

- Ⓐ 4
 Ⓑ 5
 Ⓒ 6
 Ⓓ 7

22. 求 $\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy dx$

- Ⓐ $\frac{e}{4}$

- Ⓑ $e^4 - 1$

- Ⓒ $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$

- Ⓓ $\frac{1}{4}e^4$

23. 求 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = ?$

- Ⓐ $1 - \frac{\pi}{4}$

- Ⓑ $2 - \frac{\pi}{2}$

- Ⓒ $\frac{\pi}{2} - 1$

- Ⓓ $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

24. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2}$ 之值

- Ⓐ $\frac{1}{2}$

- Ⓑ 2

- Ⓒ $\ln 2$

- Ⓓ e

25. 設 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ，若 $A^{22} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，則 $a + b + d = ?$

- Ⓐ $1 - 2^{21}$

- Ⓑ $3 - 2^{22}$

- Ⓒ $1 - 2^{22}$

- Ⓓ $3 - 2^{21}$